



University of Trento

University of Brescia

University of Padova

University of Trieste

University of Udine

University IUAV of Venezia

Gianluca Mazzucco

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL
COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E
CALCESTRUZZO

EXPERIMENTAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF
BOND BEHAVIOUR BETWEEN CONCRETE AND
FRP

C.E. Majorana

C. Pellegrino

(2011)

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI
INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRENTO

**Doctoral School in Engineering of Civil and Mechanical Structural
Systems**

nr. XXII

Esame finale: 07/04/2011

Commissione esaminatrice

prof. Maurizio Piazza Università degli Studi di Trento

prof. Francesco Marotti De Sciarra Università di Napoli, Federico II

prof. Joan Ramon Casas Universitat Politecnica de Catalunya

RINGRAZIAMENTI

In questi anni di lavoro sono numerose le persone che devo ringraziare e che in modi molto diversi hanno apportato qualcosa per lo sviluppo di questa tesi.

Ringrazio in particolar modo il prof. C. E. Majorana per i suoi preziosi consigli sul Metodo degli Elementi Finiti, la prof.ssa V. Salomoni per le infinite ore dedicatemi a discutere delle problematiche sorte in questi anni e per esserci sempre stata. Ringrazio ancora il prof. C. Pellegrino per la possibilità datami.

Giovanna che mi ha sopportato in molti momenti difficili e tutto il gruppo di lavoro di cui faccio parte.

V. Messina per il supporto informatico.

Ringrazio ancora tutti i tecnici di laboratorio del Dip. di Costruzioni e Trasporti dell'università di Padova, per il loro prezioso aiuto nello svolgimento delle sperimentazioni.

I miei familiari per il loro sostegno.



BOZZA

SOMMARIO

1	INTRODUZIONE	1
1.1	Materiale composito Calcestruzzo-FRP	5
1.2	Fibre	7
1.3	Matrici Polimeriche.....	10
2	FENOMENO DI ADERENZA.....	13
2.1	Introduzione	13
2.2	Determinazione delle tensioni di interfaccia	15
2.2.1	Sforzi e tensioni di taglio	20
2.2.2	Sforzi di peeling.....	22
2.3	Soluzione teorica considerando lo strato di adesivo	23
2.3.1	Esempio numerico	36
2.4	Debonding.....	39
2.4.1	Modello della fessura coesiva.....	40
2.4.2	Modelli di danno.....	49
2.5	Modelli di Danno alla Mazars.....	53

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

2.5.1	Variabile di Danno.....	56
2.5.2	Interpretazione dei valori.....	60
2.6	Appendice	61
3	EFFETTI DIFFERITI	73
3.1	Introduzione	73
3.2	Calcestruzzo	76
3.2.1	Modo di rappresentazione basato sui nuclei viscosi.....	81
3.2.2	Teoria dell'ereditarietà	83
3.2.3	Modello di creep applicato al calcestruzzo	92
3.2.4	Modello B3	95
3.2.5	Esempio	102
3.3	FRP	105
3.3.1	Modello di viscosità a fibre micromeccanico.....	111
3.3.2	Effetto di Aging nell'FRP	118
3.4	Modello Numerico	121
3.4.1	Procedimento risolutivo.....	129
3.4.2	Generalizzazione	131

3.4.3	Calcolo della correzione del vettore delle forze	135
3.4.4	Valutazione dello spazio occupato.....	137
3.5	Appendice	138
4	TEORIA DEL CONTATTO.....	143
4.1	Introduzione	143
4.2	Definizione del contatto nel caso di sistemi a un grado di libertà 146	
4.3	Metodo Penalty in problemi monodimensionali	151
4.4	Contatto Normale tridimensionale.....	155
4.5	Legge costitutiva di Interfaccia.....	159
4.6	Modello Numerico	164
4.6.1	Determinazione della coppia di contatto	166
4.6.2	Il segno della funzione di gap	182
4.6.3	Ricerca del possibile contatto	185
4.6.4	Test: definizione della normale ad una superficie.....	189
4.6.5	Definizione legame tensioni deformazioni	191
4.6.6	Costruzione della matrice di rigidezza nella coppia di contatto	197

4.7	Esempio	201
5	TRATTAMENTI SUPERFICIALI	205
5.1	Introduzione	205
5.2	Trattamenti Superficiali	207
5.3	Modifica del Modello Numerico	209
5.4	Test di confronto numerico - sperimentale	215
6	SPERIMENTAZIONE	221
6.1	Introduzione	221
6.1.1	Caratteristiche dei materiali FRP	222
6.1.2	Matrice	223
6.1.3	Fibre	225
6.2	Prove a Taglio " <i>Double shear</i> "	227
6.2.1	Procedimento analitico per la determinazione dei risultati	229
6.2.2	Risultati Sperimentali	233
6.3	Caratterizzazione della resina epossidica per effetti differiti	237
6.3.1	Test per la calibrazione del modello numerico	244
6.4	Prove a lungo termine nei compositi FRP	248

6.4.1	Determinazione delle caratteristiche meccaniche iniziali del calcestruzzo.....	249
6.4.2	Caratterizzazione della resina.....	254
6.4.3	Caratteristiche delle fibre	255
6.4.4	Setup di prova	256
6.4.5	Compensazioni di misura.....	265
6.4.6	Misure di creep.....	268
7	IMPLEMENTAZIONE NUMERICA	277
7.1	Introduzione	277
7.2	cGlobal.....	279
7.3	cMatrix.....	282
7.4	cNode.....	282
7.5	cNodeRes	286
7.6	cElement	286
7.6.1	Esempio (utilizzo degli elementi tetraedrici)	304
7.7	cBoundary	307
7.8	cMaterial.....	309
7.9	cElasticIso	313

7.9.1	Test	317
7.10	cElasticOrt.....	322
7.10.1	Test	326
7.11	cViscoElastic.....	328
7.12	cViscoB3	335
7.13	cViscoFRP	336
7.14	cLoad	337
7.14.1	Test	339
7.15	cPenaltyBoundary.....	341
7.16	cAssembly.....	342
7.17	cSolver	347
7.18	cGaussElimination	351
7.19	cSolverCond.....	351
7.20	cLinearSolver	353
7.21	cLinearSolver_CRS	354
7.22	nlSolver	355
7.23	cStep	356

7.24	GID.f90	357
7.25	cSet	358
7.26	logo.f90	360
7.27	readInputFile.f90	360
7.28	cGMsh	361
7.29	Appendice	362
7.29.1	Modulo cGlobal	362
7.29.2	Modulo cMaterial	372
7.29.3	Assembly	378
8	MODELLI NUMERICI	381
8.1	Introduzione	381
8.2	Implementazione in ABAQUS	382
8.2.1	Confronto Numerico Sperimentale	387
8.2.2	Effetti di bordo	395
8.2.3	Dipendenza dalla mesh (Mesh Sensitivity)	399
8.3	Modelli numerici di creep	402
8.3.1	Caratteristiche geometriche	403

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI
INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

8.3.2	Risultati numerici.....	407
8.4	Trave precompressa mediante fogli in FRP.	412
9	CONCLUSIONI.....	425
9.1	Sviluppi futuri.....	427
	BIBLIOGRAFIA	429

1 INTRODUZIONE

Negli ultimi decenni gli interventi di recupero su strutture civili sono andati sempre più aumentando, andando a sviluppare metodi in grado di soddisfare sia i bisogni strutturali, nonché interventi rapidi ed economicamente vantaggiosi.

In questo campo dell'ingegneria ha preso sempre più piede la tecnologia FRP (Fiber Reinforced Polymers) che consiste nell'incollaggio esterno alle strutture esistenti di fogli o lamine di fibre, di vario materiale, immerse in resine polimeriche (matrici); andandone a migliorare la capacità portante sia per effetti assiali, flessionali, sia per azioni taglianti (Bank, 2006; Pellegrino & Modena, 2008, 231-244; Ferretti & Savoia, 2003, 1069-1083).

Le fibre generalmente impiegate sono composte di filamenti di carbonio, disposte all'interno della matrice sia in modo monodirezionale per concentrare l'azione del rinforzo in un'unica direzione, o in più direzioni per sopportare sollecitazioni pluriassiali attraverso l'incollaggio successivo di fogli monodirezionali ad angolazione variabile o ancora mediante tessuti la cui trama definisce il comportamento della fibra (Lemaitre, 1971

Li & Maricherla, 2006, 475-483).

Questi rinforzi vengono generalmente impiegati con successo su strutture in calcestruzzo, muratura, legno, pietra naturale ecc... (Pellegrino & Modena, 2008, 231-244; Pellegrino & Tinazzi, 2008, 180-189; Ferretti & Savoia, 2003, 1069-1083; Pantelides & Romero, 2010, 37-45), andando a sostituire le armature aggiuntive che i classici metodi di recupero andrebbero ad impiegare, consentendo così interventi molto veloci, economici e con un basso impatto visivo.

Il materiale che ne deriva risulta essere un composito ortotropo, che migliora le caratteristiche dei singoli componenti, andando ad incrementarne la resistenza strutturale.

Uno dei principali problemi che questa metodologia di intervento presenta è il distacco fragile del rinforzo dalla superficie incollata raggiunto il limite di resistenza del collegamento. Questo effetto viene chiamato delaminazione o “debonding” e risulta la principale causa di collasso delle strutture rinforzate con FRP. La delaminazione si verifica in regioni con elevata concentrazione di tensione, spesso in corrispondenza di discontinuità strutturali o fessure. Le modalità di propagazione del fenomeno di distacco dipendono essenzialmente dalle proprietà meccaniche del rinforzo, del substrato e dell'interfaccia. In particolare, per un elemento rinforzato con FRP, si possono distinguere modi di rottura differenti (rottura del supporto, rottura dell'FRP per trazione, cedimento dell'adesivo, delaminazione dell'FRP, rottura dell'interfaccia adesivo-supporto, rottura dell'interfaccia FRP-adesivo). L'aderenza e le caratteristiche dell'ancoraggio del rinforzo esterno con FRP al substrato assumono quindi importanza primaria nell'ambito dell'efficienza della

tecnica di intervento, ma lo studio e la caratterizzazione del comportamento accoppiato fra fibre FRP ed elementi di calcestruzzo è una problematica complessa che coinvolge un numero di parametri interagenti attualmente non completamente definiti.

Nel caso di compositi in calcestruzzo rinforzato con FRP, è comunque possibile notare che questo fenomeno viene regolato essenzialmente dalle tensioni tangenziali e le tensioni normali (chiamate anche tensioni di peeling), che nascono nell'interfaccia del collegamento una volta sollecitato. Ultimi studi relazionano queste grandezze al tipo di preparazione meccanica che la superficie di calcestruzzo subisce prima dell'incollaggio della fibra (Iovinella, 2010; Toutanji & Ortiz, 2001, 457-462).

Il presente lavoro si propone quindi di indagare i fenomeni di aderenza tra FRP ed elementi strutturali di calcestruzzo, utilizzando le evidenze sperimentali disponibili (e programmate) al fine di calibrare/modificare opportunamente il modello matematico-numerico creato per la simulazione di detti fenomeni in domini bi- e tri-dimensionali.

In particolare, si è investigato sull'evoluzione dello stato tensionale/deformativo dei rinforzi FRP anche in condizioni di permanenza del carico (comportamento a lungo termine), associandovi modellazioni teoriche appropriate, soprattutto nell'ambito della meccanica del danneggiamento. Nella fattispecie è stato sviluppato un codice tridimensionale agli elementi finiti, scritto in Fortran 90, in grado di rappresentare il comportamento di interfaccia di travi in calcestruzzo rinforzate da fogli di FRP, sia in fase elastica che durante il fenomeno di

delaminazione, tenendo conto degli effetti di danneggiamento del materiale.

Al fine di simulare il comportamento della zona di interfaccia sono state implementate procedure di cambiamento di stato (contatto) (Salomoni & Mazzucco, 2011, 5-29) accoppiate al danno (secondo la teoria di Mazars), così da poter efficacemente rappresentare l'intero processo di delaminazione, dal suo innesco (dovuto al superamento del limite di resistenza del collegamento) fino al distacco completo del rinforzo.

La modellazione tridimensionale ha consentito quindi di poter ottenere lo stato tensionale all'interfaccia, riuscendo così a rappresentare il comportamento "di bordo", prettamente bidimensionale, delle tensioni tangenziali (come evidenziato da vari autori in fase di sperimentazione (Subramaiam & Carloni, 2007, 578-594, Pellegrino & Tinazzi, 2008, 180-189)), nonché gli effetti di peeling.

E' stato poi indagato il comportamento a lungo termine, attraverso test atti a caratterizzare i parametri viscosi dei componenti. Sono state effettuate prove a trazione sulle matrici polimeriche dell'FRP (resine epossidiche) e prove su travetti rinforzati da fogli di fibre in carbonio monodirezionali, soggetti a carichi concentrati.

Dal punto di vista numerico le deformazioni differite sono state studiate implementando leggi costitutive di tipo elastoviscoso sia per il calcestruzzo, attraverso l'inclusione del modello B3 proposto da (Bazant & Baweja, 2000, 1-83), sia per l'FRP, attraverso l'impiego del modello micromeccanico proposto in (Ascione & Berardi, 2006, 7-10).

1.1 Materiale composito Calcestruzzo-FRP

Possiamo definire come materiale composito, una collaborazione di più elementi caratterizzati da proprietà fisico-meccaniche differenti; si distinguono generalmente una matrice, materiale che funge da supporto all'aggregato, e l'aggregato stesso che vi viene annegato. Le caratteristiche dei compositi, data la loro natura, non sono riconducibili ad una semplice unione delle proprietà dei loro costituenti, ma dipendono anche da altri parametri legati a fattori quali il rapporto delle concentrazioni, la forma e la distribuzione dei componenti, ecc...

Anche se lo stesso calcestruzzo e l'FRP presi singolarmente possono essere definiti come materiali compositi (il calcestruzzo è composto da pasta cementizia e inerti, mentre l'FRP da resina e fibre), indicheremo il calcestruzzo rinforzato esternamente da FRP come un composito realizzato da due componenti: il calcestruzzo e l'FRP, andando a studiare generalmente l'effetto globale, o a macroscale, dei due materiali, senza entrare nella meso o microscale del problema. Questa semplificazione di scala è stata seguita in tutto il lavoro svolto, abbandonandola solo nei capitoli inerenti gli effetti differiti, dove le leggi viscoelastiche dei materiali imponevano la valutazione del comportamento dei singoli componenti dei singoli materiali. Infatti nel modello B3, per la rappresentazione del

calcestruzzo si impone la definizione del mix design essendo la legge di creep fortemente influenzata dalla quantità di inerti presenti nel calcestruzzo; allo stesso modo la legge micromeccanica impiegata per la definizione della funzione di creep dell'FRP considera esplicitamente il comportamento della matrice polimerica e delle fibre, essendo queste ultime meno soggette agli effetti viscosi.

Ci sono essenzialmente due metodi per la produzione dell' FRP: mediante processi industriali, che realizzano l'elemento di materiale FRP che dovrà essere successivamente impiegato nella pratica costruttiva, o attraverso una produzione "manuale" in cui l'impregnazione delle fibre alla matrice polimerica viene eseguita manualmente. Nell'edilizia il primo metodo è generalmente usato per la realizzazione di barre in FRP, mentre i fogli o le lamine impiegati per i rinforzi esterni vengono più spesso realizzati manualmente.

1.2 Fibre

Nel campo dell'ingegneria civile le fibre generalmente impiegate si possono classificare in base alla loro "forma".

Si hanno quindi:

Fibre monodirezionali, formate da filamenti paralleli ad un'unica direzione (Fig. 1).



Fig. 1 Fibre di carbonio monodirezionali

Fibre corte, la cui lunghezza è, al più, di qualche centimetro (Fig. 2); queste fibre che possono essere di materiale polimerico, o metallico, sono generalmente impiegate all'interno dell'impasto cementizio. Il materiale fibroso che ne deriva è classificato come FRC.

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO



Fig. 2 Fibre corte

Tessuti, che grazie alla loro trama riescono ad assorbire sollecitazioni pluriassiali (Fig. 3).

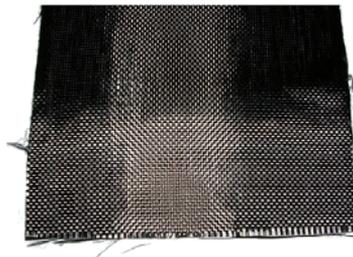


Fig. 3 Tessuto in carbonio

Le fibre hanno il compito di assorbire le sollecitazioni di trazione nel composito. Sono caratterizzate da un'elevata resistenza meccanica.

I principali materiali impiegati per la realizzazione delle fibre nel campo dell'ingegneria civile sono: carbonio, vetro, aramide, il polivinilalcoli PVA e altri prodotti polimerici (Bank, 2006).

Le principali caratteristiche meccaniche di fibre impiegate, sono state riportate in Tab. 1.

	f_t^1 (GPa)	E_0^1 (GPa)	ϵ_u^1 (%)	Densità (Kg/m ³)	Diametro (mm)	α^1 (mm/m/K)
Carbonio	3.6	230÷640	0.3÷1.5	1800	7	-0,1÷0,5
Aramide	2.8÷4.1	80÷190	2.0÷4.0	1400÷ 1500	12	-2,0
Polietilene	2.6÷3.0	120÷170	2.7÷3.5	1000	27÷38	-10
Vetro-S	4.3	87	5	2500	10	2.9
Vetro-E	3.4	72	2.5÷3.5	2600	320	4.8÷5.4
Polivinilalcol i	0.6÷2.3	60÷200	0.4÷0.5	1400÷ 1500	12	-2,0
Acciaio FeB 44K	0.43 snerv.	210	12	7850	~10 ⁶	10
	0.54 rott.					

Tab. 1 Caratteristiche meccaniche delle principali fibre impiegate

1.3 Matrici Polimeriche

La matrice è la fase che in un composito funge da aggregante e da protettivo. Essa può anche influire sulle caratteristiche chimiche, termiche ed elettriche del sistema complessivo. La sua alterabilità in condizioni ambientali critiche può compromettere il rinforzo e ridurre le capacità compressive.

La peculiarità dei compositi di manifestare caratteristiche meccaniche compressive superiori a quelle dei singoli componenti fa comprendere come la resa sia migliore quando, in presenza di una ben determinata sollecitazione, il comportamento è regolato dal componente più indicato per tale effetto. Al fine di garantire quindi la resistenza meccanica ottimale, prerogativa delle fibre, la matrice è dotata di deformabilità superiore a quella delle prime, in modo che il suo allungamento trasferisca interamente ad esse la sollecitazione.

Le matrici possono essere di natura organica o inorganica; sono ottenute da reazioni di polimerizzazione, cioè da una reazione a catena tra composti caratterizzati da legami insaturi. Esistono sia polimeri naturali che sintetici; questi ultimi costituiscono il gruppo più esteso delle materie plastiche. Dalle caratteristiche chimiche e fisiche delle molecole base della reazione e dal tipo di polimero che si vuole ottenere dipende la scelta della reazione di polimerizzazione che si deve innescare.

Le matrici polimeriche possono essere distinte in termo-indurenti e termo-plastiche.

Le prime vengono lavorate allo stato fluido a bassa viscosità con l'aggiunta di catalizzatori che portano alla polimerizzazione; tale sistema permette l'impregnazione delle fibre senza raggiungere alte temperature che possono provocare decomposizioni o combustioni nella fase fibrosa. La struttura molecolare di queste fibre è caratterizzata da legami forti, indissolubili, da cui derivano la durabilità e l'ampia applicazione nel campo dell'ingegneria civile. Ben diverse sono le caratteristiche del polimero termo-plastico: oltre alla reversibilità dallo stato solido alla fase fluida quando soggetto a trattamento ciclico, è più resistente e duttile dei polimeri termo-indurenti, ma è maggiormente soggetto all'attacco dei solventi. La sua scarsa diffusione è imputabile alla difficoltà di impregnazione delle fibre. Le principali caratteristiche meccaniche delle matrici polimeriche impiegate per la realizzazione dei compositi sono riassunte in Tab. 2.

	f_t^1 (Gpa)	E_o^1 (Gpa)	ϵ_u^1 (%)	Densità (Kg/m ³)	α^1 (mm/m/K)
<i>Epossidica</i>	55÷130	2.5÷4.1	1÷9	1100÷1300	45÷90
<i>Poliestere</i>	20÷100	2.1÷4.1	1÷6	1000÷1450	55÷100
<i>Poliammide</i>	40÷190	3÷5	1÷60	1300÷1400	14÷50
<i>BMI</i>	40÷100	2.1÷4.7	1,2÷6,6	1200	21÷73
<i>PEEK</i>	103	1.1	30÷150	1300	55

Tab. 2 Caratteristiche meccaniche delle matrici polimeriche

Tra le varie resine utilizzabili quelle epossidiche sono generalmente le più adatte per i compositi FRP, grazie all'alta resistenza e alla forte adesione alle fibre che riescono ad ottenere una volta avvenuta la polimerizzazione. Le resine epossidiche presentano un'alta resistenza alla corrosione, un basso ritiro durante la polimerizzazione.

Non risente dei carichi termici fino a temperature di circa 180°C ma a seconda del tipo di resina epossidica impiegata la temperatura di transizione vetrosa può arrivare anche a 300°C (Bank, 2006).

NOTE:

¹ f_t = resistenza a trazione, E_0 modulo elastico, ε_u deformazione ultima, α coefficiente di dilatazione termica.

2 FENOMENO DI ADERENZA

2.1 Introduzione

Il fenomeno di aderenza tra due componenti di un composito, è un fenomeno molto complesso regolato da diversi fattori quali ad esempio, i legami chimico fisici che si instaurano nella fase di incollaggio, il tipo di preparazione delle superficie, le resistenze e le rigidzze dei singoli componenti ecc... Considerando compositi calcestruzzo - FRP l'aspetto che regola anche in fase di progettazione la dimensione del rinforzo è la delaminazione, che consiste nel distacco dell'ancoraggio dei fogli o lamine di materiale polimerico posto a contatto con la superficie di calcestruzzo.

Il fenomeno presenta comportamento di tipo fragile all'aumentare del carico applicato con lo sviluppo di una fessura che generalmente si propaga parallela alla superficie di incollaggio tra calcestruzzo e FRP.

Il primo passo per la determinazione del comportamento di interfaccia è stato eseguito mediante lo studio dello stato tensionale/deformativo in regime elastico, considerando una perfetta adesione tra calcestruzzo ed FRP, e utilizzando formulazioni semplificate monodirezionali, con il vantaggio di poter risolvere il problema attraverso equazioni differenziali risolubili in forma chiusa (Liu & Zhu, 1994, 21-26; Smith & Teng, 2001, 857-871; Ascione & Feo, 2000, 535-540).

La seconda fase è stata quella di analizzare l'evoluzione della delaminazione; ciò comporta lo sviluppo di problemi non lineari che non possono essere risolti in forma chiusa. Negli ultimi decenni questo fenomeno è stato trattato da diversi autori attraverso la meccanica della frattura (Bruno & Carpino, 2007, 1459-1474; Ferracuti & Savoia, 2006, 356-364; Monti, Renzelli, 2003; Spoelstra & Monti, 1999, 143-150; Niu & Wu, 2001, 1277-1288), di cui verrà dato un breve cenno in questo capitolo, o attraverso la meccanica del danneggiamento (Salomoni & Mazzucco, 2011, 5-29; Marfia & Sacco, 2010, 13-20; Fedele & Milani, 2010, 2345-2357), che riesce a descrivere la rottura del rinforzo mediante un'unica variabile di danno.

Nei materiali compositi, la resistenza ultima per una determinata sollecitazione risulta essere generalmente quella del componente più debole direttamente sollecitato, che nel caso in esame corrisponde all'elemento di calcestruzzo; infatti come evidenziato da prove sperimentali (Subramaiam & Carloni, 2007, 578-594; Pellegrino & Tinazzi, 2008, 180-189) si è potuto osservare che la modalità di rottura per delaminazione avviene nei primi strati di calcestruzzo prossimi alla

superficie di incollaggio. Si è quindi scelto di trattare il progressivo deterioramento del collegamento calcestruzzo - FRP, mediante una legge di danno sviluppata da (Mazars, 1986) classicamente impiegata nei materiali fragili quali i calcestruzzi.

2.2 Determinazione delle tensioni di interfaccia

Lo studio del comportamento di interfaccia tra FRP e calcestruzzo in campo elastico è stato sviluppato da diversi autori cercando una soluzione chiusa delle equazioni differenziali che governano il problema (Liu & Zhu, 1994, 21-26; Smith & Teng, 2001, 857-871; Ascione & Feo, 2000, 535-540). Considerando il problema monodirezionale, le tensioni di interfaccia che caratterizzano il collegamento sono essenzialmente due: le tensioni di taglio (shear stresses) e le tensioni normali all'interfaccia (peeling o normal stresses). Utilizzando la teoria delle sezioni composite è stato possibile ottenere le equazioni differenziali con l'ipotesi iniziale di ricavare una risposta elastica di tutti i componenti. La soluzione chiusa viene determinata essenzialmente per strutture semplici, travi in semplice appoggio, o mensole, sollecitate con carichi uniformemente distribuiti, o concentrati, in modo da potere facilmente imporre le condizioni al contorno del problema.

Uno dei primi studi per la rappresentazione del campo tensionale nella zona di contatto tra due componenti di un materiale composito, di una trave variamente vincolata, è stato realizzato nel 1994 da (Liu & Zhu, 1994, 21-26) in cui si descrive il comportamento di interfaccia tra cls e piastre in acciaio incollate esternamente.

Grazie all'ipotesi di materiale elastico lineare questa teoria è facilmente applicabile ad altre tipologie di materiali.

Si consideri una trave di cemento armato in semplice appoggio avente sezione rettangolare di base b_1 e altezza $2h_1$, caricata mediante un carico uniformemente distribuito q , a cui viene incollata una lamina di FRP di base b e altezza $2h_2$, con disposizione simmetrica, Fig. 4

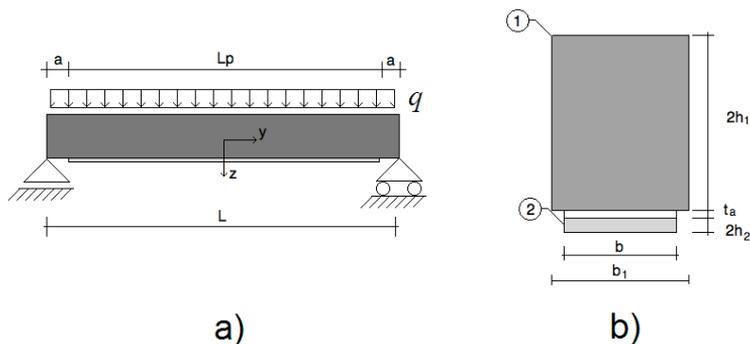


Fig. 4 Trave in semplice appoggio a) sezione trasversale b)

Chiamiamo L la lunghezza totale della trave, L_p la lunghezza della lamina in FRP e a la distanza tra i vincoli e l'inizio della lamina di FRP. Si indichi t_a lo spessore dello strato di adesivo.

Consideriamo un elementino di trave di lunghezza dx mostrato in Fig. 5

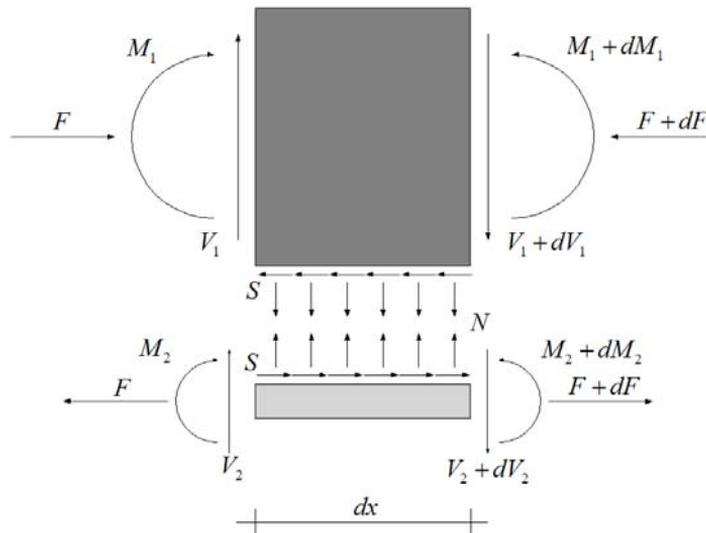


Fig. 5 Elemento infinitesimo di trave

M_1 è la sollecitazione di momento applicata alla trave di solo calcestruzzo armato, M_2 la sollecitazione di flessione nel foglio di FRP, V_1 e V_2 le relative sollecitazioni di taglio e F le sollecitazioni assiali. S e N' sono rispettivamente la risultante delle tensioni di taglio e delle tensioni normali di interfaccia dell'elementino infinitesimo.

Le equazioni indefinite di equilibrio nel calcestruzzo sono:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= S \\ \frac{dV_1}{dx} &= -N' - q \\ \frac{dM_1}{dx} &= V_1 - Sh_1\end{aligned}\tag{2.1}$$

Mentre per la lamina di FRP possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= S \\ \frac{dV_2}{dx} &= -N' \\ \frac{dM_2}{dx} &= V_2 - Sh_2\end{aligned}\tag{2.2}$$

Le equazioni differenziali nel cls (indice 1) e nella lamina (indice 2) possono essere scritte come:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 w_1}{dx^2} &= \frac{M_1}{E_1 I_1} - \frac{\alpha q}{G_1 A_1} \\ \frac{d^2 w_2}{dx^2} &= \frac{M_2}{E_2 I_2}\end{aligned}\tag{2.3}$$

dove è stato indicato con w lo spostamento verticale (lungo l'asse z v. Fig. 4 a)). Il termine α è il coefficiente a taglio considerando la deformabilità a taglio della trave in calcestruzzo (trascurata nella seconda equazione riguardante il solo FRP).

Gli sforzi di taglio S e quelli di peeling all'interfaccia N' possono essere descritti dalle espressioni:

$$\begin{aligned}S &= K_S (u_2 - u_1 + e) \\ N &= K_N (w_2 - w_1)\end{aligned}\tag{2.4}$$

dove: $K_S = G_a b / t_a$ è la rigidezza a taglio e $K_N = E_a b / t_a$ è la rigidezza normale all'interfaccia. Il termine u_1 rappresenta la componente di spostamento orizzontale (lungo l'asse x) del bordo inferiore della sezione in calcestruzzo, mentre u_2 coincide con la componente di spostamento orizzontale del bordo superiore della lamina di FRP, mentre e è lo spostamento orizzontale del cls a causa della deformazione a taglio.

2.2.1 Sforzi e tensioni di taglio

Per valutare l'equazione governante il comportamento a taglio, si differenzia la prima delle (2.4) e si ottiene:

$$\frac{dS}{dx} = K_s \left(\frac{du_2}{dx} - \frac{du_1}{dx} + \frac{de}{dx} \right) \quad (2.5)$$

Le derivate lungo l'asse x degli spostamenti possono essere scritte come:

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{M_1 h_1}{E_1 I_1}, \quad \frac{du_2}{dx} = \frac{F}{E_2 A_2} \quad \text{mentre la variazione di spostamento dovuta}$$

alla deformabilità a taglio della trave in calcestruzzo risulta $\frac{de}{dx} = -\frac{q}{2b_1 G_1}$.

Se consideriamo un carico q uniformemente distribuito, la sua derivata lungo la direzione x risulta nulla: $dq/dx = 0$ quindi derivando ulteriormente la (2.5) si otterrà:

$$\frac{d^2 S}{dx^2} - \lambda^2 S = -K_s h_1 \frac{V_1}{E_1 I_1} \quad (2.6)$$

Il cui termine λ^2 risulta essere:

$$\lambda^2 = K_s \left(\frac{1}{E_2 A_2} + \frac{h_1^2}{E_1 I_1} \right) \quad (2.7)$$

La soluzione dell'equazione (2.6) può essere ricavata considerando le condizioni al contorno del problema.

Questa teoria essendo di tipo monodimensionale non tiene conto degli effetti bidimensionali che si creano alle estremità dei fogli di FRP (Pellegrino & Tinazzi, 2008, 180-189); considera quindi una distribuzione uniforme delle tensioni di taglio lungo la larghezza. Le tensioni di shear sono poi determinate mediante la relazione:

$$\tau(x) = \frac{S}{b} \quad (2.8)$$

2.2.2 Sforzi di peeling

Gli sforzi di peeling vengono ricavati differenziando la seconda delle equazioni (2.4) fino alla derivata quarta (lo sviluppo completo qui omesso, è riportato in (Liu & Zhu, 1994, 21-26).

L'equazione differenziale finale, considerando il parametro β come:

$$\beta = \frac{1}{4} \left[K_N \left(\frac{1}{E_2 I_2} + \frac{1}{E_1 I_1} \right) \right]^{1/4} \quad (2.9)$$

risulta:

$$\frac{d^4 N'}{dx^4} - 4\beta^4 N' = \frac{dS}{dx} \left(\frac{h_2}{E_2 I_2} + \frac{h_1}{E_1 I_1} \right) - \frac{q}{E_1 h_1} \quad (2.10)$$

La soluzione dell'equazione si determina applicando le condizioni al contorno del problema. In (Liu & Zhu, 1994, 21-26) è possibile trovare la soluzione per travi in semplice appoggio caricate in modi differenti.

Considerando una distribuzione di tensione uniforme lungo lo spessore del foglio di FRP, le tensioni di peeling risulteranno pari a:

$$\sigma(x) = \frac{N'(x)}{b} \quad (2.11)$$

2.3 Soluzione teorica considerando lo strato di adesivo

Un approccio simile a quello adottato in (Liu & Zhu, 1994, 21-26) ma più completo, per descrivere la soluzione chiusa del problema dell'interfaccia è stato sviluppato da (Smith & Teng, 2001, 857-871). La soluzione descrive il comportamento di interfaccia di 2 elementi composti da materiali elastici lineari (gli elementi 1 e 2 rappresentano rispettivamente il calcestruzzo e l'FRP) connessi da un strato di adesivo rappresentato in questo caso da un materiale elastico lineare. Le ipotesi per la risoluzione del problema sono:

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

- materiali 1 e 2 e strato di adesivo rimangono in regime elastico lineare
- non si verifica scorrimento tra cls e adesivo e tra adesivo ed FRP
- lo stress nello strato di adesivo è uniforme nello spessore
- nell'analisi dello stress di taglio si assume che la curvatura della trave in cls coincida con quella della lamina di FRP. (questa ipotesi viene abbandonata per lo studio degli stress di peeling).

L'elemento infinitesimo di trave viene descritto dalla Fig. 6 dove: $\tau(x)$ e $\sigma(x)$ sono rispettivamente gli stress di taglio e normali all'interfaccia.

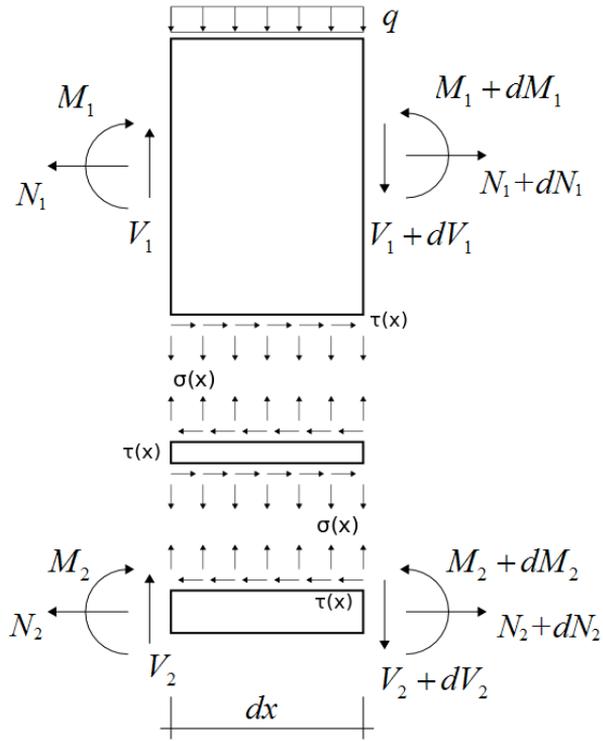


Fig. 6 Elemento infinitesimo di trave

Le deformazioni di taglio γ nello strato di adesivo possono essere valutate come:

$$\gamma = \frac{du(x, z)}{dx} + \frac{dw(x, z)}{dz} \quad (2.12)$$

La tensione di taglio τ all'interfaccia può essere facilmente ricavata considerando un comportamento elastico lineare isotropo dell'adesivo mediante la formula:

$$\tau(x) = G_a \gamma = G_a \left(\frac{du(x, z)}{dz} + \frac{dw(x, z)}{dx} \right) \quad (2.13)$$

dove: $G_a = \frac{E_a}{2(1+\nu)}$ modulo a taglio dell'adesivo e ν coincide con il coefficiente di Poisson.

Differenziando l'equazione (2.13) si ottiene:

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = G_a \left(\frac{d^2u(x, z)}{dx dz} + \frac{d^2w(x, z)}{dx^2} \right) \quad (2.14)$$

Si può subito notare che la derivata seconda dello spostamento verticale w coincide con la curvatura, considerando la teoria della linea elastica.

Utilizzando quindi l'ipotesi di avere la stessa curvatura sia per la trave in calcestruzzo che per i fogli di FRP possiamo scrivere che:

$$\frac{d^2w(x, z)}{dx^2} = \frac{M_T}{E_T I_T} \quad (2.15)$$

dove: $E_T I_T$ è la rigidezza totale della sezione.

Si assume che lo strato di adesivo sia soggetto ad una tensione di taglio uniforme e che gli spostamenti orizzontali u varino linearmente lungo lo spessore. Grazie a questa assunzione possiamo scrivere la variazione dello spostamento u lungo z pari a:

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_2(x) - u_1(x)}{t_a} \quad (2.16)$$

Differenziando la (2.16) lungo x si ottiene:

$$\frac{d^2u}{dx dz} = \frac{1}{t_a} \left(\frac{du_2(x)}{dx} - \frac{du_1(x)}{dx} \right) \quad (2.17)$$

L'equazione (2.14) può essere quindi riscritta come:

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = G_a \left(\frac{du_2(x)}{dx} - \frac{du_1(x)}{dx} - \frac{M_T t_a}{E_T I_T} \right) \quad (2.18)$$

In generale il termine $t_a / E_T I_T$ risulta essere molto piccolo e quindi può essere trascurato.

Possiamo valutare le deformazioni assiali alla base della sezione di cls ε_1 e quelle sulla faccia superiore dello strato di FRP ε_2 considerando la derivata degli spostamenti corrispondenti rispetto alla direzione x:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \frac{du_1}{dx} &= \frac{y_1}{E_1 I_1} M_1(x) - \frac{1}{E_1 A_1} N_1(x) + \frac{y_1}{G_1 \alpha A_1} [q + b\sigma(x)] \\ \varepsilon_2 = \frac{du_2}{dx} &= -\frac{y_2}{E_2 I_2} M_2(x) + \frac{1}{E_2 A_2} N_2(x) + \frac{y_2}{G_2 \alpha A_2} [q + b\sigma(x)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

L'equilibrio orizzontale dell'elemento infinitesimo di trave (v. Fig. 6) viene soddisfatto dall'equazione:

$$\frac{dN_1(x)}{dx} = \frac{dN_2(x)}{dx} = b\tau(x) \quad (2.20)$$

dove: $N_1(x) = N_2(x) = F(x) = \int_0^x \tau(x)dx$

Considerando la stessa curvatura sia per l'elemento in calcestruzzo che per quello in FRP risulta che il momento applicato nell'elemento 1 è proporzionale a quello dell'elemento 2, dove il fattore di proporzionalità coincide con il rapporto tra le rigidezze R:

$$M_1(x) = RM_2(x) \quad \text{con} \quad R = \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \quad (2.21)$$

Mentre il momento totale si ricava considerando l'equilibrio:

$$M_T = M_1(x) + M_2(x) + N(x)(h_1 + h_2 + t_a) \quad (2.22)$$

Il momento per ogni componente della sezione può quindi essere calcolato come:

$$\begin{aligned}
 M_1(x) &= \frac{R}{R+1} \left[M_T(x) - b \int_0^x \tau(x)(h_1 + h_2 + t_a) dx \right] \\
 M_2(x) &= \frac{1}{R+1} \left[M_T(x) - b \int_0^x \tau(x)(h_1 + h_2 + t_a) dx \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

Differenziando le (2.23) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_1(x)}{dx} = V_1(x) &= \frac{R}{R+1} \left[V_T(x) - b\tau(x)(h_1 + h_2 + t_a) \right] \\
 \frac{dM_2(x)}{dx} = V_2(x) &= \frac{1}{R+1} \left[V_T(x) - b\tau(x)(h_1 + h_2 + t_a) \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Sostituendo le equazioni delle deformazioni assiali (2.19) all'equazione (2.18) e differenziando ancora lungo x si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\tau(x)}{dx^2} = & + \frac{G_a}{t_a} \left(-\frac{h_2}{E_2 I_2} \frac{dM_2(x)}{dx} + \frac{1}{E_2 A_2} \frac{dN_2(x)}{dx} + \frac{bh_2}{\alpha G_2 A_2} \frac{d\sigma}{dx} \right) \\
 & + \frac{G_a}{t_a} \left(-\frac{h_1}{E_1 I_1} \frac{dM_1(x)}{dx} + \frac{1}{E_1 A_1} \frac{dN_1(x)}{dx} - \frac{bh_1}{\alpha G_1 A_1} \left(\frac{dq}{dx} + \frac{d\sigma}{dx} \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

L'equazione finale si ottiene andando a sostituire le derivate dei momenti con le equazioni (2.23) e (2.24) trovate in precedenza:

$$\frac{d^2\tau(x)}{dx^2} - \frac{G_a}{t_a} \left(\frac{(h_1+h_2)(h_1+h_2+t_a)}{E_1I_1+E_2I_2} + \frac{1}{E_1A_1} + \frac{1}{E_2A_2} \right) \tau(x) = \frac{G_a}{t_a} \left[\left(\frac{h_1+h_2}{E_1I_1+E_2I_2} \right) VT - \frac{bh_1}{\alpha G_1 A_1} \frac{dq}{dx} - \frac{b}{\alpha} \left(\frac{h_1}{E_1A_1} + \frac{h_2}{E_2A_2} \right) \frac{d\sigma}{dx} \right] \quad (2.26)$$

L'equazione (2.26) rappresenta l'equazione differenziale per la determinazione delle tensioni di taglio all'interfaccia tra cls e FRP considerando materiali di tipo elastico lineare.

Semplificando il problema e ammettendo che le deformazioni a taglio siano trascurabili, l'equazione differenziale si semplifica come segue:

$$\frac{d^2\tau(x)}{dx^2} - \frac{G_a}{t_a} \left(\frac{(h_1+h_2)(h_1+h_2+t_a)}{E_1I_1+E_2I_2} + \frac{1}{E_1A_1} + \frac{1}{E_2A_2} \right) \tau(x) = \frac{G_a}{t_a} \left[\left(\frac{h_1+h_2}{E_1I_1+E_2I_2} \right) V_T \right] \quad (2.27)$$

Se si considera come carico applicato un carico uniformemente distribuito $q(x) = q$, in questo caso si ha $d^2V_T / dx^2 = 0$ e la soluzione generale del problema può essere scritta come:

$$\tau(x) = B_1 \cosh(\lambda x) + B_2 \sinh(\lambda x) + m_1 V_T(x) \quad (2.28)$$

dove:

$$\lambda = \left[\frac{G_a}{t_a} \left(\frac{(h_1 + h_2)(h_1 + h_2 + t_a)}{E_1 I_1 + E_2 I_2} + \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2} \right) \right]^{1/2} \quad (2.29)$$

$$m_1 = \frac{G_a}{\lambda^2 t_a} \left(\frac{h_1 + h_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \right)$$

La determinazione delle tensioni di peeling avviene attraverso la deformazione dello strato di adesivo:

$$\sigma(x) = \frac{E_a}{t_a} [w_2(x) - w_1(x)] \quad (2.30)$$

Le equazioni di equilibrio delle due componenti risultano essere:

componente 1 (calcestruzzo)

$$\begin{aligned}\frac{d^2w_1}{dx^2} &= -\frac{M_1}{E_1I_1} - \frac{q + b\sigma(x)}{\alpha G_1A_1} \\ \frac{dM_1(x)}{dx} &= V_1(x) - b\tau(x)h_1 \\ \frac{dV_1(x)}{dx} &= -b\sigma(x) - q\end{aligned}\tag{2.31}$$

componente 2 (FRP)

$$\begin{aligned}\frac{d^2w_2}{dx^2} &= -\frac{M_2}{E_2I_2} - \frac{b\sigma(x)}{\alpha G_2A_2} \\ \frac{dM_2}{dx} &= V_2(x) - b\tau(x)h_2 \\ \frac{dV_2(x)}{dx} &= -b\sigma(x)\end{aligned}\tag{2.32}$$

Differenziando la prima equazione delle (2.31) e (2.32) fino alla derivata di quarto ordine si ricava:

$$\frac{d^4 w_1}{dx^4} = \frac{b\sigma(x)}{E_1 I_1} - \frac{1}{\alpha G_1 A_1} b \frac{d^2 \sigma}{dx^2} + \frac{h_1}{E_1 I_1} b \frac{d\tau(x)}{dx} + \frac{q}{E_1 I_1} - \frac{b}{\alpha G_1 A_1} \frac{d^2 \sigma}{dx^2} \quad (2.33)$$

$$\frac{d^4 w_2}{dx^4} = \frac{b\sigma(x)}{E_2 I_2} - \frac{1}{\alpha G_2 A_2} b \frac{d^2 \sigma}{dx^2} + \frac{h_2}{E_2 I_2} b \frac{d\tau(x)}{dx}$$

Derivando la (2.30) fino alla derivata quarta e sostituendo con le (2.33) si ottiene l'equazione differenziale per gli sforzi di peeling:

$$\frac{d^4 \sigma}{dx^4} - \frac{E_a b}{\alpha t_a} \left(\frac{1}{G_1 A_1} + \frac{1}{G_2 A_2} \right) \frac{d^2 \sigma}{dx^2} + \frac{E_a b}{t_a} \left(\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2} \right) \sigma(x) = - \frac{E_a b}{t_a} \left(\frac{h_1}{E_1 I_1} - \frac{h_2}{E_2 I_2} \right) \frac{d\tau(x)}{dx} - \frac{q E_a}{t_a E_1 I_1} + \frac{E_a}{\alpha t_a G_1 A_1} \frac{d^2 q}{dx^2} \quad (2.34)$$

Grazie alla teoria qui descritta, è stato realizzato un programma in Fortran 90 per la risoluzione dell'equazione differenziale, servito per i confronti con i modelli numerici che verranno descritti nei capitoli successivi.

Le subroutine necessarie per la risoluzione dell'equazione in forma chiusa sono riportate in appendice al capitolo.

2.3.1 Esempio numerico

Si consideri una trave in semplice appoggio (Fig. 4) di lunghezza $L = 500\text{mm}$ caricata con un carico uniformemente distribuito $q = 100\text{N/mm}$. La trave è composta da una sezione rettangolare in calcestruzzo di dimensioni $100 \times 100\text{mm}$ alla cui base è stato incollato un foglio di FRP di dimensioni $50 \times 2\text{mm}$. La lunghezza del foglio di FRP risulta pari a $L_p = 400\text{mm}$. Si assume uno spessore costante di adesivo pari a 2.5mm mentre le caratteristiche dei materiali sono riassunte in Tab. 1

Componente	Larghezza [mm]	Altezza [mm]	E [MPa]	ν
Calcestruzzo	100.0	100.0	30000.0	0.2
FRP	50.0	2.0	2000.0	0.35
Adesivo	50.0	2,5	200000.0	0.35

Tab. 3 Caratteristiche geometriche

Utilizzando la teoria di (Smith & Teng, 2001, 857-871) è possibile ottenere le curve delle tensioni di taglio e di peeling all'interfaccia. In Fig. 7 è riportato l'andamento delle tensioni di taglio, ove l'ascissa pari a 0 coincide con l'estremità della fascia di FRP in cui compare il picco di tensione (essendo in corrispondenza del taglio massimo della trave)

mentre per $x = 400\text{mm}$ (pari a L_p) si raggiunge l'estremità apposta della fascia di FRP, in cui per simmetria di carico si ottengono gli stessi valori di tensione con segno opposto.

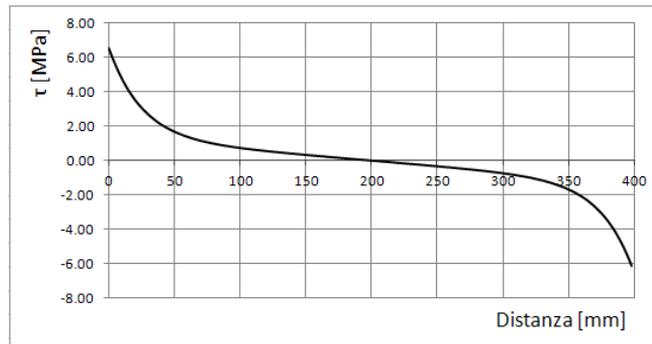


Fig. 7 Tensioni di Taglio lungo l'interfaccia

In Fig. 8 è riportato il confronto tra tensioni di taglio e di peeling fino a metà trave. Vi si può notare che le tensioni di peeling si esauriscono molto più velocemente delle tensioni di taglio spostandosi dall'esterno verso l'interno dell'interfaccia.

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

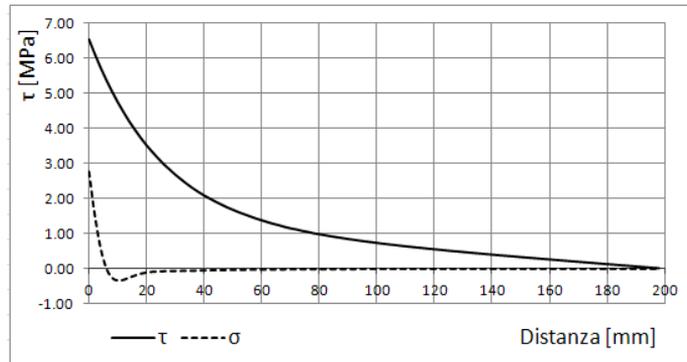


Fig. 8 Comparazione stress di taglio e di peeling lungo l'interfaccia

Questo stesso esempio verrà ripreso più avanti come termine di confronto tra teoria monodimensionale elastica e modello numerico tridimensionale sviluppato.

2.4 Debonding

La teoria precedentemente sviluppata ha trattato la connessione tra le componenti di un composito considerando una perfetta aderenza. Questo è generalmente valido per bassi valori tensionali, mentre all'aumentare del carico e delle tensioni di interfaccia si innescano effetti non lineari dovuti alla rottura del collegamento.

Il progressivo distacco della fascia di FRP dovuto alla delaminazione, avviene asportando anche uno strato superficiale di calcestruzzo parallelo alla fascia stessa (vedasi Fig. 9).



Fig. 9 Delaminazione su una prova a double shear

Volendo quindi studiare tutto il processo di carico di una struttura fino al suo collasso non è possibile trattare il problema con le sole soluzioni chiuse monodirezionali.

2.4.1 Modello della fessura coesiva

Lo sviluppo del fenomeno di delaminazione anche in assenza di aumento di carico dopo la fessurazione è stato descritto da (Wu & Niu, 2000, 1431-1441; Niu & Wu, 2001, 1277-1288) , i quali adottando un modello lineare per la definizione del legame tensioni - scorrimenti, hanno investigato gli effetti delle fessure causate dalle tensioni di taglio all'interfaccia, sviluppando successivamente una metodologia di previsione di innesco della delaminazione legata a fattori di tipo energetico.

In accordo con i risultati sperimentali, per ottenere uno schema del meccanismo di delaminazione, è stato adottato un legame τ - δ (tensioni - scorrimenti) di tipo bilineare, come indicato in Fig. 10.

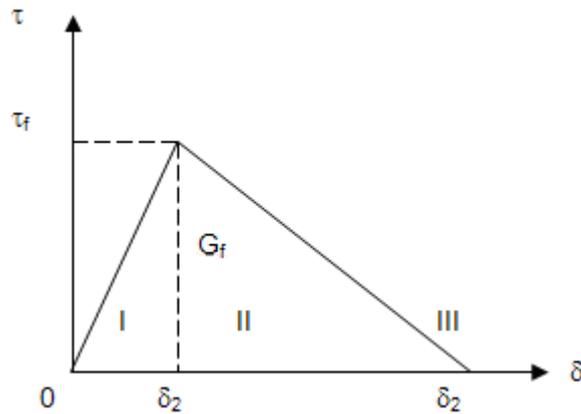


Fig. 10 Diagramma tensioni - scorrimenti

Come indicato in figura, la relazione tra le tensioni tangenziali di interfaccia e i relativi scorrimenti è caratterizzata da tre fasi: la fase I, ascendente, che corrisponde ad una risposta elastica del collegamento, la fase II, discendente, che corrisponde al processo di delaminazione in un punto del rinforzo; la fase III coincidente con il distacco del rinforzo e la fine del processo di delaminazione nel punto considerato. τ_f rappresenta la tensione locale mentre l'area sottesa dal segmento discendente rappresenta l'energia di frattura G_f .

Il parametro δ definito come $u_2(x) - u_1(x)$, (indicando con i pedici 1 e 2 i componenti 1 e 2 del composito) costituisce la differenza tra gli scorrimenti che caratterizzano l'interfaccia in cui si realizza l'aderenza.

È possibile quindi descrivere il fenomeno della delaminazione in tre fasi ben distinte:

- Stato I: con l'incremento del carico esterno, le fessure si formano inizialmente nella parte caratterizzata da momento massimo. Un consistente aumento della trazione sulle fibre comporta un incremento delle tensioni tangenziali all'apertura della fessura. In questo stato l'interfaccia FRP-calcestruzzo si trova lungo il braccio ascendente. Al raggiungimento del picco di tensione, ha inizio il micro-debonding.
- Stato II: l'interfaccia FRP-calcestruzzo si trova in uno stato complesso, in parte già entrata nella fase di "softening", in parte ancora nella fase ascendente. Con l'incremento della zona di softening la posizione del picco di tensione muove dal punto di formazione della fessura verso l'estremità non caricata dell'FRP, causando la propagazione del micro-debonding. Al raggiungimento di un determinato livello di carico, gli scorrimenti in corrispondenza della fessura raggiungono il valore massimo, e la tensione tangenziale scende a zero. A questo punto inizia la fase visibile di macro-debonding.
- Stato III: successivamente alla formazione completa della delaminazione, la propagazione del fenomeno può essere molto instabile, ed il raggiungimento del completo debond dipende dallo schema fessurativo che distingue il substrato.

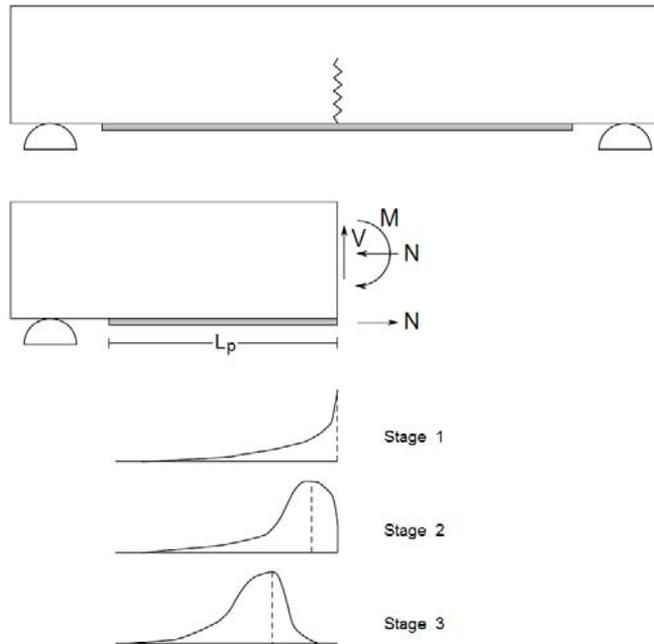


Fig. 11 variazione della distribuzione delle tensioni tangenziali al variare del livello di carico

In Fig. 11 si mostra la distribuzione delle tensioni al variare del carico applicato, con la formazione del picco (stage 1), l'aumento delle tensioni fino alla formazione della fessura (stage 2) e l'avanzamento del processo di delaminazione (stage 3).

In modo semplificato, il fenomeno può essere spiegato come segue:

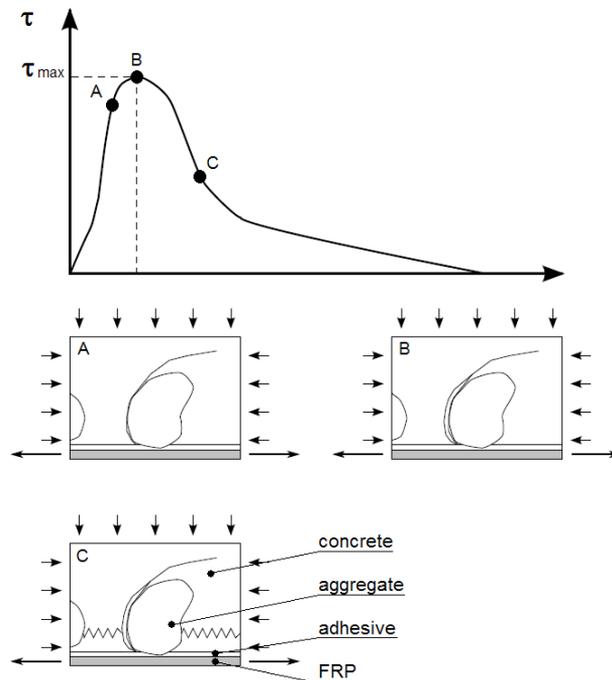


Fig. 12 *Debond a livello micromeccanico*

Prima del raggiungimento della tensione tangenziale massima e del relativo scorrimento (punto A del grafico), la perfetta aderenza tra lamina di FRP e superficie di calcestruzzo dà luogo ad una legge costitutiva di tipo elastico; questo comportamento corrisponde, nella schematizzazione fornita da (Wu & Niu, 2000, 1431-1441; Niu & Wu, 2001, 1277-1288), allo stage I. La situazione si destabilizza al raggiungimento del picco di tensione (punto B del grafico), che porta a una microfessurazione del legante, la parte più debole, attorno agli aggregati. Innescata la fessura, il

fenomeno è instabile e imprevedibile; gli sforzi taglienti provocano la formazione di fessure d'interfaccia con la successiva prosecuzione della frattura e l'incremento degli scorrimenti relativi tra substrato e rinforzo, fino al raggiungimento dello scorrimento ultimo, e quindi alla completa delaminazione del rinforzo. La natura della fessura che si viene a formare appare considerevolmente influenzata dalla posizione e dalla regolarità del substrato (e quindi dalla preparazione della superficie di incollaggio, come verrà mostrato più avanti), nonché dall'entità degli inerti presenti in quest'ultimo, deviando e modificando la sua direzione in dipendenza degli stessi.

Il fenomeno di distacco del rinforzo appena descritto può essere modellato attraverso la meccanica della frattura, considerando una modalità di rottura di tipo II, ovvero di scivolamento nel piano. Le fessure sono provocate da scollamenti tra i componenti granulari e la matrice legante che possono estendersi fino alla formazione di una macrofessura. L'aumento dell'ampiezza della fessura risulta contrastato dalla presenza delle fibre, fino a un valor massimo cui corrisponde la rottura dell'interfaccia. Si veda in proposito la Fig. 13:

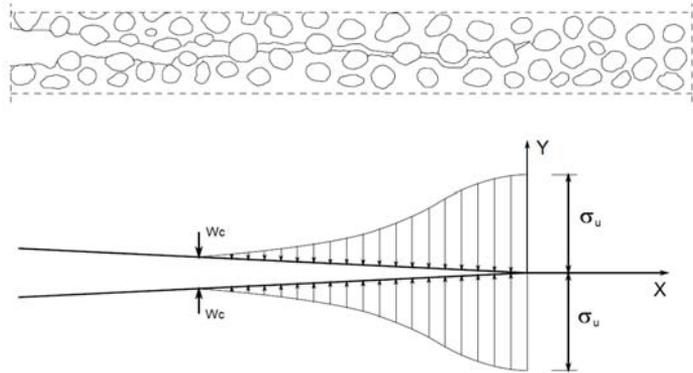


Fig. 13 Modello della fessura coesiva.

Come definito precedentemente, la meccanica della frattura descrive questo comportamento tramite la legge elasto-softening rappresentata in Fig. 14:

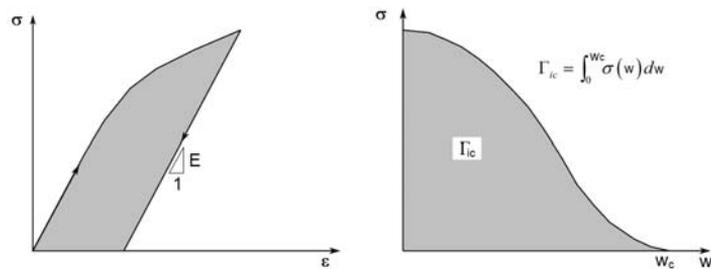


Fig. 14 Doppia legge costitutiva: a) tensione-deformazione; b) tensione – apertura della fessura

Le Fig. 13 e Fig. 14 rappresentano un modello di fessura coesiva, secondo il quale la distribuzione delle forze coesive non è costante ma decresce all'aumentare dell'apertura della fessura, con una legge di tipo "softening" come quella di Fig. 14 b). Nell'intorno dell'estremità della fessura reale, questa risulta danneggiata e microfessurata e in essa può distinguersi un tratto della fessura in evoluzione, ancora tuttavia parzialmente cucito da inclusioni, aggregati o fibre (Fig. 14 a)). Tale zona, in cui avvengono fenomeni non lineari e dissipativi di tipo microscopico, è detta *zona di processo* (o *zona plastica*). L'estremità della *fessura coesiva* (o *fittizia*) coincide con l'estremità della zona di processo, in cui l'apertura w si annulla e la tensione corrispondente alla richiusura è pari alla resistenza a trazione σ_u . L'estremità della *fessura reale* si trova invece in corrispondenza dell'apertura critica w_c , per cui l'interazione si annulla.

Queste considerazioni confermano quindi la progressività del fenomeno della delaminazione: essa parte dall'estremo caricato con il raggiungimento in quel punto della tensione tangenziale necessaria all'innesco della frattura e dello scorrimento corrispondente; da qui la prosecuzione della frattura nella zona successiva e lo spostamento del picco di tensione lungo la zona d'aderenza fino al completo distacco del rinforzo. In Fig. 15 è visibile, nel caso di un test a double shear, l'aumento del valore massimo di tensione fino al raggiungimento del valore limite con conseguente delaminazione che sposta il massimo verso l'interno del foglio di FRP.

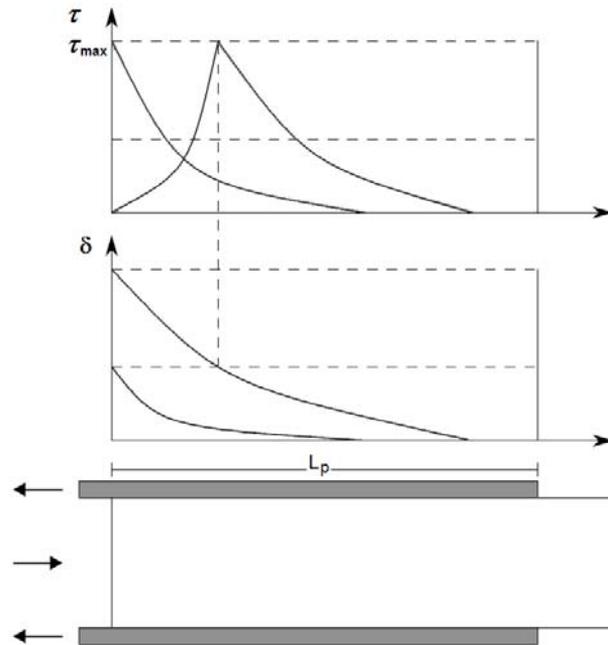


Fig. 15 Migrazione del picco di tensione e dello scorrimento

2.4.2 *Modelli di danno*

È possibile descrivere il modello introdotto nel precedente paragrafo attraverso la meccanica del danneggiamento. Uno dei primi modelli monodimensionali sviluppati con la teoria del danno per lo studio della delaminazione, considerando una legge di softening di tipo lineare è stata sviluppata da Monti (Monti, Renzelli, 2003; Spoelstra & Monti, 1999, 143-150). La soluzione proposta da questo autore è stata determinata attraverso l'implementazione della legge in un elemento finito 1D in grado di simulare il distacco tra il rinforzo in FRP e l'elemento di calcestruzzo.

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

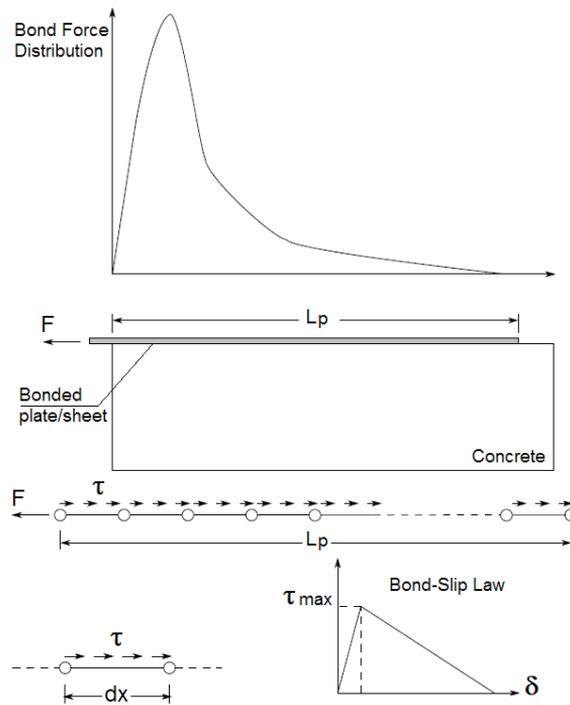


Fig. 16 Legge di danno non lineare

L'esempio riportato in Fig. 16 rappresenta il foglio di FRP a contatto con il calcestruzzo e soggetto a una forza di trazione F (l'esempio rappresenta una classica prova a single shear per la valutazione del carico ultimo del rinforzo).

La legge costitutiva utilizzata per gli elementi in FRP è stata assunta elastica lineare, mentre gli effetti non lineari di danneggiamento vengono attribuiti ai soli effetti del taglio attraverso una legge del tipo:

$$\Delta \tau = E(\delta) \cdot \Delta \delta \quad (2.35)$$

che descrive la tensione tangenziale di interfaccia in funzione dello scorrimento tra i due materiali.

Il legame costitutivo rappresentato dalla funzione E_b , dipende da tre parametri:

La massima tensione tangenziale τ_{max} , funzione delle caratteristiche meccaniche del calcestruzzo utilizzato;

Lo scorrimento δ , corrispondente al raggiungimento del picco di tensione;

Lo scorrimento ultimo δ_i , corrispondente alla completa separazione dell'FRP dalla superficie del calcestruzzo.

Questo modello, anche se molto semplificato rispetto alle problematiche studiate, permette di seguire il processo di delaminazione all'aumentare del carico applicato, ma non tiene conto di molti aspetti che influenzano lo stato tensionale all'interfaccia quali ad esempio la rigidità dei vari componenti che caratterizzano il composito nonché le caratteristiche meccaniche del calcestruzzo. Sono poi escluse dall'indagine anche le

tensioni di peeling di interfaccia che potrebbero ridurre la resistenza del collegamento. Inoltre, trattandosi di modello monodimensionale sono completamente trascurati gli effetti bidimensionali di bordo.

L'impiego della meccanica del danneggiamento per la rappresentazione della delaminazione ha inoltre il vantaggio di essere di "relativa" facile implementazione all'interno di codici ad elementi finiti, riuscendo comunque a rappresentare gli effetti di softening che il rinforzo presenta a causa della rottura del collegamento. L'utilizzo del solo modello di danno per lo studio di tutto il processo di delaminazione (fino al completo distacco del rinforzo), all'interno della teoria agli elementi finiti, potrebbe non essere sufficiente, in quanto la riduzione di rigidità che il sistema subisce a causa della variabile di danno potrebbe comportare problemi di convergenza. Per risolvere queste problematiche è possibile rappresentare la superficie di interfaccia tra i vari componenti mediante la teoria del contatto associando ad essa un comportamento elasto-danneggiativo come descritto in (Mazars, 1986) e spiegato in dettaglio nei prossimi capitoli.

2.5 Modelli di Danno alla Mazars

Un modello più complesso di danno, rispetto a quello visto in (Monti, Renzelli, 2003; Spoelstra & Monti, 1999, 143-150) per la rappresentazione i materiali fragili quali il calcestruzzo, è quello ricavato dalla teoria di Mazars (Mazars, 1986; Majorana & Mazars, 1997,349-354).

Questa legge di danneggiamento generalmente impiegata per tali materiali, è in grado di differenziare i diversi effetti di deterioramento che il materiale subisce, a causa di stati tensionali di trazione o compressione, mediante due variabili di danno distinte in grado di definirne il comportamento globale associato ad entrambi gli effetti. Inoltre questo modello è stato impiegato storicamente con buoni risultati previsionali sia per modelli bidimensionali (Majorana & Mazars, 1997,349-354) che su modelli tridimensionali (Majorana & Salomoni, 2010, 1694-1712).

La teoria di Mazars si basa sulle seguenti ipotesi iniziali:

- Il calcestruzzo è composto da grani sferici (nei modelli tridimensionali) immersi in una matrice omogenea.
- Matrice e grani si considerano perfettamente fragili e rispettano i criteri energetici di Griffith
- La zona di interfaccia tra matrice e grani è molto più fragile dei materiali costituenti la matrice e i grani

Il modello consiste nel rappresentare il danneggiamento del materiale attraverso una curva di softening e mediante una variabile di danno d , introdotta da (Kachanov, 1958, 26-31) e (Lemaitre, 1971), per la valutazione dello stress effettivo di un elemento danneggiato. La variabile d può assumere valori che vanno da 0 (materiale vergine) a 1 (materiale completamente danneggiato).

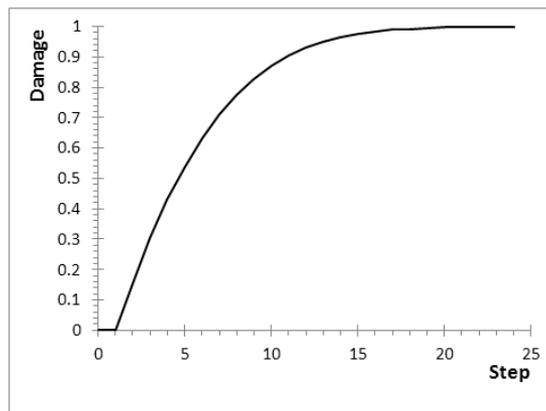


Fig. 17 Esempio di variazione della variabile di danno d

Un generico andamento della variabile di danno nel caso di un elemento soggetto a spostamento impresso crescente è riportato in Fig. 17.

Lo stress effettivo è valutato come:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-d} \quad (2.36)$$

Indicando con \mathbf{D}_C il tensore costitutivo elastico di quarto ordine si può scrivere il legame tensioni - deformazioni come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (1-d)\mathbf{D}_C : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.37)$$

A livello energetico si può definire l'energia di deformazione ψ_d mediante la relazione: $\boldsymbol{\sigma} = d\psi_d / d\boldsymbol{\varepsilon}$. In questo caso, grazie alla possibilità pervenire ad un danneggiamento del materiale, si può determinare il "damage strain energy release rate" Y analogo al parametro G "strain energy release rate" della teoria della frattura:

$$Y = \frac{\partial \psi_d}{\partial d} = -\frac{1}{2}\mathbf{D}_C : \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.38)$$

2.5.1 Variabile di Danno

La valutazione della variabile di danno d avviene considerando i tensori delle tensioni e delle deformazioni nel sistema principale. Si indica come deformazione equivalente $\tilde{\varepsilon}$ il termine:

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon} &= \sqrt{\sum \langle \varepsilon_{ii} \rangle_+^2} \\ \langle \varepsilon_{ii} \rangle_+ &= \varepsilon_{ii} \quad \text{se } \varepsilon_{ii} \geq 0 \\ \langle \varepsilon_{ii} \rangle_+ &= 0 \quad \text{se } \varepsilon_{ii} < 0\end{aligned} \tag{2.39}$$

dove: ε_{ii} sono le componenti non nulle del tensore delle deformazioni principali.

Per i materiali fragili quali il calcestruzzo, le resistenze a trazione e a compressione sono diverse. Nel primo caso le microfratture si verificano direttamente a causa dei carichi applicati quando viene superata la resistenza del materiale; mentre a compressione il danneggiamento avviene a causa dell'effetto Poisson (cioè a causa di una compressione applicata in una direzione si instaurano tensioni di trazione perpendicolarmente ad essa che possono innescare il danneggiamento).

La variabile di danno è quindi decomposta in due termini uno a compressione d_c e uno a trazione d_t .

$$\begin{aligned} d_t &= \mathbf{F}_t(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ d_c &= \mathbf{F}_c(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

La variabile di danno d è assunta come combinazione lineare del danno a trazione e di quello a compressione:

$$d = \alpha_t d_t + \alpha_c d_c \quad (2.41)$$

dove: i coefficienti α_i dipendono dallo stato tensionale di trazione $i=t$ e, rispettivamente, di compressione $i=c$.

Si consideri il tensore principale di tensione come somma di due termini:

$$\boldsymbol{\sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ + \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \quad (2.42)$$

in cui i termini $\langle \sigma \rangle_+$ sono gli autovalori positivi mentre $\langle \sigma \rangle_-$ sono gli autovalori negativi.

Il tensore delle deformazioni può quindi essere scritto come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_c \quad (2.43)$$

dove:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_t &= \frac{1+\nu}{E} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ - \frac{\nu}{E} Tr \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c &= \frac{1+\nu}{E} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_- - \frac{\nu}{E} Tr \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \end{aligned} \quad (2.44)$$

I coefficienti della (2.41) possono quindi essere determinati con le seguenti relazioni:

$$\alpha_t = \sum_i H_i \frac{\varepsilon_{ti} (\varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci})}{\tilde{\varepsilon}^2}$$

$$\alpha_c = \sum_i H_i \frac{\varepsilon_{ci} (\varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci})}{\tilde{\varepsilon}^2}$$
(2.45)

H_i è un coefficiente che “regola” l’andamento delle deformazioni (per determinare se corrispondono a espansione o a contrazione). Si ha quindi che $H_i=1$ se $\varepsilon_{ij} \geq 0$ altrimenti $H_i = 0$.

Si definiscono quindi le variabili di danno come:

$$d_t(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_0 (1 - A_t)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_t}{\exp^{Bt(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_0)}}$$

$$d_c(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_0 (1 - A_c)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_c}{\exp^{Bc(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_0)}}$$
(2.46)

ove i parametri A_i , B_i , (con $i=t, c$) sono valori definibili attraverso prove sperimentali, mentre ε_0 è la deformazione al limite elastico, superata la quale si innesca il processo di danneggiamento.

2.5.2 Interpretazione dei valori

I valori della variabile di danno, come detto in precedenza, possono assumere valori compresi tra 0 e 1, e il processo risulta irreversibile. Questo significa che anche variando l'evoluzione del carico applicato la variabile d non può mai decrescere. In (Mazars, 1986) viene definito il processo di danneggiamento attraverso le 4 fasi rappresentate in Fig. 18.

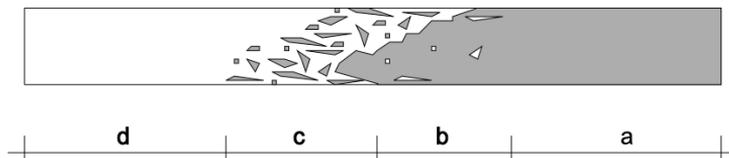


Fig. 18 Processo di danneggiamento

Si consideri un elementino di calcestruzzo soggetto ad uno stato di tensione di trazione monoassiale, monotonamente crescente.

Considerando la variazione dello stato deformativo, per valori di ϵ compresi tra 0 e ϵ_0 si è in presenza materiale in regime elastico e la variabile di danno risulta nulla, $d = 0$, Fig. 18 a). Superato ϵ_0 , la variabile di danno risulta diversa da zero con valori compresi tra $0 \leq d < 1$. A questo

intervallo è associata una condizione di microfessurazione come indicato in Fig. 18 b). Per valori di danno prossimi all'unità, $d \rightarrow 1$, le fessurazioni aumentano e nasce la cosiddetta "*crack-damage zone*", Fig. 18 c), fino ad arrivare alla condizione $d=1$ in cui la frattura è completa. Applicando questa teoria al fenomeno della delaminazione possiamo ricondurre le varie fasi del danno alle fasi della delaminazione descritte nel paragrafo precedente, mediante la teoria di Niu e Wu.

2.6 Appendice

Viene riportato un semplice codice in Fortran 90 non ottimizzato per la risoluzione delle equazioni differenziali (2.28) e (2.34) per la determinazione degli stress di taglio e di peeling nell'interfaccia, nel caso di trave in semplice appoggio soggetta ad un carico uniformemente distribuito.

```
!module for evaluating the interfacial shear and normal
!stress by the Smith Teng theory 2001,
!where an elastic model is used for the adhesive layer.
!this module evaluates only the uniform distributed
!load problem.
```

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```
module cfrpInterface
implicit none

real*8, parameter :: pi = 3.141592654d0

type tProblem
real*8 :: q
real*8 :: L,Lp
real*8 :: a,b1,b2
real*8 :: h1,h2
real*8 :: Ea
real*8 :: nia
real*8 :: ta
real*8 :: A1,E1,I1,y1
real*8 :: A2,E2,I2,y2
end type tProblem

contains
!-----costructor
subroutine tProblem_(problem)
implicit none
type(tProblem) :: problem
problem%q = 100.00d0
problem%L = 500.d0
problem%Lp = 400.d0
problem%a = (problem%L-problem%Lp)/2.d0
!concrete
problem%b1 = 100.d0
problem%h1 = 100.d0
!FRP
problem%b2 = 50.d0
problem%h2 = 2.0d0
```

```

problem%Ea =          2000.d0
problem%nia=          0.35d0
problem%maxStrain =   0.01d0
problem%ta =          1.5d0

problem%E1 =          30000.d0
problem%A1 =          problem%b1*problem%h1
problem%l1 =          problem%b1*problem%h1**(3)/12.d0
problem%y1 =          problem%h1/2.d0

problem%E2 =          200000.d0
problem%A2 =          problem%b2*problem%h2
problem%l2 =          problem%b2*problem%h2**(3)/12.d0
problem%y2 =          problem%h2/2.d0
return
end subroutine tProblem_
!-----
!evaluate adhesive shear module Ga
real*8 function Ga(p)
implicit none
type(tProblem) :: p
      Ga = (1.d0-p%Da)*p%Ea/(2.0*(1.0+p%nia))
return
end function Ga
!-----
!evaluate the total shear $V_T$
real*8 function VT(x,p)
implicit none
real*8          :: x
type(tProblem) :: p
      VT = p%q*p%L/2.d0-p%q*x

```

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI
INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```

return
end function VT
!-----
!evaluate the total bending moment $M_T$
real*8 function MT(x,p)
implicit none
real*8      :: x
type(tProblem) :: p
    MT = p%q*p%L/2.d0*x-0.5d0*p%q*x**(2.0)
return
end function MT
!-----
!evaluate lambda
real*8 function lambda(p)
implicit none
type(tProblem) :: p
    lambda=sqrt((Ga(p)*p%b2/p%ta)*
                ((p%y1+p%y2)*(p%y1+p%y2+p%ta)/
                (p%E1*p%l1+p%E2*p%l2) +
                1.d0/(p%E1*p%A1) +
                1.d0/(p%E2*p%A2)))
return
end function lambda
!-----
!evaluate the constant $m_1$
real*8 function m1(p)
implicit none
type(tProblem) :: p
    m1 = Ga(p)/(p%ta*lambda(p)**(2))*
        ( (p%y1+p%y2)/(p%E1*p%l1 + p%E2*p%l2) )
return

```

```

end function m1
!-----
!evaluate the constant $m_2$
real*8 function m2(p)
implicit none
type(tProblem) :: p
      m2 = Ga(p)*p%y1/(p%ta*p%E1*p%l1)
return
end function m2
!-----
!evaluate the constant $B_1$
!\end{equation}
real*8 function B1(p)
implicit none
type(tProblem) :: p
real*8          :: lam
      lam = lambda(p)
      B1= m2(p)*p%q*p%a/(2.d0*lam)*(p%L-p%a)*      &
          tanh(lam*p%Lp/2.d0) -                      &
          m1(p)/lam*p%q*tanh(lam*p%Lp/2.d0)
return
end function B1
!-----
!evaluate the constant $B_2$
real*8 function B2(p)
implicit none
type(tProblem) :: p
real*8          :: lam
      lam = lambda(p)
      B2 = -(m2(p)*p%q*p%a)/(2.d0*lam)*(p%L-p%a) +      &
          m1(p)*p%q/lam
return

```

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI
INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```
end function B2
!-----
!evaluate the $beta$ constant
real*8 function beta(p)
implicit none
type(tProblem) :: p
      beta = (p%Ea*p%b2/(4.d0*p%ta)*(1.d0/(p%E1*p%l1) +      &
              1.d0/(p%E2*p%l2)))**(0.25d0)
return
end function beta
!-----
!evaluate $n_1$ constant
real*8 function n1(p)
implicit none
type(tProblem) :: p
      n1=(p%y1*(p%E2*p%l2)-p%y2*(p%E1*p%l1)) /      &
          (p%E1*p%l1+p%E2*p%l2)
return
end function n1
!-----
!evaluate $n_1$ constant
real*8 function n2(p)
implicit none
type(tProblem) :: p
      n2=(p%E2*p%l2)/(p%b2*(p%E1*p%l1+p%E2*p%l2))
return
end function n2
!-----
!evaluate $n_1$ constant
real*8 function n3(p)
implicit none
```

```

type(tProblem) :: p
      n3=((p%Ea*p%b2)/p%ta)*(p%y1/(p%E1*p%l1) -      &
          p%y2/(p%E2*p%l2))

return
end function n3
!-----
!evaluate $C_1$ constant
real*8 function C1(p)
implicit none
type(tProblem) :: p
real*8      :: beta_
      beta_ = beta(p)
      C1 = p%Ea/(2.d0*beta_**(3.0)*p%ta*p%E1*p%l1) *      &
          (VT(p%a,p)+beta_*MT(p%a,p)) -      &
          n3(p)*tau(0.d0,p)/(2.d0*beta_**(3.0)) +      &
          n1(p)/(2.d0*beta_**(3.0))*(d4Tau(0.d0,p) +      &
          beta_*d3Tau(0.d0,p))

return
end function C1
!-----
!evaluate $C_2$ constant
real*8 function C2(p)
implicit none
type(tProblem) :: p
real*8      :: beta_
      beta_ = beta(p)
      C2 = p%Ea/(2.d0*beta_**(2.0)*p%ta*p%E1*p%l1)*      &
          MT(p%a,p) -      &
          n1(p)/(2.d0*beta_**(2.0))*d3Tau(0.d0,p)

return
end function C2
!-----

```

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI
INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```

!evaluate the peeling stress  $\sigma$ 
real*8 function sigma(x,p)
implicit none
real*8      :: x
type(tProblem) :: p
real*8      :: bx,b_
real*8      :: A1,A2,A3
  A1 = 0.d0
  A2 = 0.d0
  A3 = 0.d0
  bx = beta(p)*x
  b_ = beta(p)
  A1 = exp(-bx)*(C1(p)*cos(bx)+C2(p)*sin(bx))
  A2 = -n1(p)*d1Tau(x,p)
  A3 = -n2(p)*p%q
  sigma = A1+A2+A3
return
end function sigma
!-----
!evaluate interface shear stress
real*8 function tau(x,p)
implicit none
type(tProblem)  :: p
real*8          :: x !position
real*8          :: lam
real*8          :: A1,A2,A3

  lam = lambda(p)
  A1 = B1(p)*cosh(lam*x)+B2(p)*sinh(lam*x)
  A2 = -(B1(p)*cosh(lam*(p%Lp-x))+B2(p) *      &
        sinh(lam*(p%Lp-x)))

```

```

        A3 = m1(p)*p%q*(p%L/2.d0-x-p%a)
        tau = A1+A2+A3

return
end function tau
!-----
!evaluate  $\frac{d\tau}{dx}$ 
real*8 function d1Tau(x,p)
implicit none
type(tProblem) :: p
real*8          :: x !position
real*8          :: lam
real*8          :: A1,A2,A3

        lam = lambda(p)
        A1 = +lam*(B1(p)*sinh(lam*x)+B2(p)*cosh(lam*x))
        A2 = +lam*(B1(p)*sinh(lam*(p%Lp-x)) +      &
                B2(p)*cosh(lam*(p%Lp-x)))
        A3 = -m1(p)*p%q
        d1Tau = A1+A2+A3

return
end function d1Tau
!-----
!evaluate  $\frac{d^2\tau}{dx^2}$ 
real*8 function d2Tau(x,p)
implicit none
type(tProblem) :: p
real*8          :: x !position
real*8          :: lam
real*8          :: A1,A2,A3

        lam = lambda(p)
        A1 = +lam**(2)*(B1(p)*cosh(lam*x)+B2(p) *      &
                sinh(lam*x))
        A2 = -lam**(2)*(B1(p)*cosh(lam*(p%Lp-x)) +      &
                B2(p)*sinh(lam*(p%Lp-x)))

```

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI
INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```

        A3 = +0.d0
        d2Tau = A1+A2+A3
return
end function d2Tau
!-----
!evaluate  $\frac{d^3\tau}{dx^3}$ 
real*8 function d3Tau(x,p)
implicit none
type(tProblem) :: p
real*8          :: x !position
real*8          :: lam
real*8          :: A1,A2,A3
        lam = lambda(p)
        A1 = +lam**(3)*(B1(p)*sinh(lam*x) +      &
                    B2(p)*cosh(lam*x))
        A2 = +lam**(3)*(B1(p)*sinh(lam*(p%Lp-x)) + &
                    B2(p)*cosh(lam*(p%Lp-x)))
        A3 = +0.d0
        d3Tau = A1+A2+A3
return
end function d3Tau
!-----
!evaluate  $\frac{d^4\tau}{dx^4}$ 
real*8 function d4Tau(x,p)
implicit none
type(tProblem) :: p
real*8          :: x !position
real*8          :: lam
real*8          :: A1,A2,A3
        lam = lambda(p)
        A1 = +lam**(4)*(B1(p)*cosh(lam*x)+B2(p) * &

```

```

                sinh(lam*x))
A2 = -lam**(4)*(B1(p)*cosh(lam*(p%Lp-x)) +      &
        B2(p)*sinh(lam*(p%Lp-x)))
A3 = +0.d0
d4Tau = A1+A2+A3
return
end function d4Tau
!-----
!evaluate the strain $\epsilon_{12}$
real*8 function strain(x,p)
implicit none
real*8      :: x
type(tProblem) :: p
        strain = tau(x,p)/Ga(p)
return
end function strain
!-----
subroutine plot(unit,x,p)
implicit none
integer      :: unit
real*8      :: x
type(tProblem) :: p
real*8      :: lam

        lam = lambda(p)

        write(unit,999) x,          &
                B1(p)*cosh(lam*x),  &
                B2(p)*sinh(lam*x),  &
                m1(p)*p%q*(p%L/2.d0-x-p%a), &
                tau(x,p),           &
                sigma(x,p),         &
                strain(x,p)

```

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```
return
999 format(13e11.3)
end subroutine plot
end module cfrpInterface
!-----
program main
use cfrpInterface
implicit none
type(tProblem) :: p,x
integer      :: i, maxStep
integer      :: unit
    unit = 9
    i = 0
    maxStep = 200
    x = 0.d0
        call tProblem_(p)
        open(unit, file='value.dat',status='unknown',err=99)
        write(unit,998)
        do i= 1,maxStep+1
            call plot(unit,x,p)
            x = x + p%Lp/maxStep
        end do
        close(unit)
stop
99 continue
    write(*,*)'open file error, program was terminated'
stop
999 format(6x,'x[mm]',4x,'\lambda' ,9x,'B1',9x,'B2',2x, &
        '\tau[MPa]',1x,'\sigma[MPa]',7x,'e12')
end program
```

Box 1 Algoritmo basato sulla teoria di (Smith & Teng, 2001, 857-871)

3 EFFETTI DIFFERITI

3.1 Introduzione

Se si considerano applicazioni dei compositi calcestruzzo-FRP su grandi opere, quali ad esempio travi da ponte ripristinate con fogli di FRP soggetti a carichi di lungo periodo, gli effetti differiti di viscosità e ritiro dei materiali e della struttura non possono essere trascurati.

Il problema è ancora in fase di studio da parte di diversi autori, sia a livello sperimentale sia attraverso definizioni di modelli previsionali numerici. Considerando che la zona di indagine risulta essere generalmente l'interfaccia di collegamento tra FRP e calcestruzzo, diversi autori quali

ad esempio Wu e Diab in (Diab & Wu, 2007, 2323-2333) hanno concentrato gli effetti differiti in questa zona definendo una legge tensioni tangenziali – scorrimenti, variabile nel tempo, attraverso il criterio dei micro scorrimenti MSCM (*micro-slip criterion model*). Questo criterio permette di valutare oltre agli effetti viscosi dell'interfaccia anche il processo di delaminazione dovuto ad azioni a lungo termine. Gli effetti viscoelastici sono però presenti su tutto il composito, e limitare gli effetti alla sola interfaccia potrebbe sottostimare gli effetti deformativi globali della struttura. È ragionevole pensare che il comportamento globale risulta essere legato ai singoli elementi che compongono la struttura nel suo complesso, quindi la variazione di tensioni e/o deformazioni nel tempo sarà fortemente condizionata dai materiali costituenti.

Considerare che ogni materiale costituente abbia un proprio comportamento a lungo termine come proposto ad esempio in (Savoia & Ferretti, 2002), significa definire leggi di creep specifiche per ogni materiale e che queste interagendo andranno a determinare una nuova soluzione caratteristica del composito. Nel caso di modelli tridimensionali lo studio del comportamento differito dei singoli componenti permette di rappresentare in modo completo il fenomeno.

Nel caso di calcestruzzi rinforzati con FRP sono state definite le funzioni di creep specifiche sia del calcestruzzo che dell'FRP, applicate successivamente al modello tridimensionale. Il calcestruzzo è stato trattato come un materiale isotropo soggetto ad azioni a lungo termine

sufficientemente basse da non generare fessurazioni nel materiale. Tale ipotesi semplificativa, generalmente impiegata per la rappresentazione del comportamento elasto-viscoso di questa tipologia di materiali, è valida considerando una distribuzione omogenea degli inerti all'interno del conglomerato in modo da garantire una distribuzione uniforme di tensione. La funzione di viscosità impiegata per la rappresentazione del fenomeno, segue il modello B3 sviluppato da Bazant in (Bazant & Murphy, 1995, 357-365; Bazant & Baweja, 2000, 1-83).

Il materiale FRP è stato considerato anch'esso come un composito caratterizzato da fibre immerse in una matrice polimerica, andando a definire il contributo di entrambi i componenti rispetto alle azioni differite. Per l'FRP essendo valida l'ipotesi che le fibre siano completamente immerse e solidali alla matrice, il problema è stato studiato considerando un materiale omogeneizzato fibra + matrice.

3.2 Calcestruzzo

Gli effetti di viscosità e ritiro nel calcestruzzo sono il risultato di complessi fenomeni fisico-chimici che si instaurano nella pasta di cemento. Sperimentalmente la determinazione dei soli effetti viscosi che riguardano principalmente l'idratazione della pasta di cemento risulta ulteriormente complicata dall'eterogeneità del materiale. Infatti oltre al reale meccanismo di creep dovuto ai fenomeni che si instaurano nella pasta, la conformazione degli inerti all'interno della miscela può comportare differenti misurazioni di deformazione causate dalle alte concentrazioni di stress e l'innescò di microfessurazioni nell'interfaccia pasta-aggregato (Bazant, 1988).

L'utilizzo di leggi di derivazione sperimentale, per la predizione dei fenomeni differiti, permette di tener conto della variabilità dei dati che si otterrebbero realmente, attraverso una misurazione statistica dei risultati.

Considerando un elemento di calcestruzzo sottoposto ad una compressione costante monoassiale applicata a partire da un tempo t' , è possibile notare un incremento dello stato deformativo nel tempo. L'incremento di deformazione che si verifica dopo quello istantaneo dovuto all'applicazione del carico viene chiamato deformazione viscosa.

Nel caso in cui gli effetti viscosi possano sommarsi (effetti additivi) ci si muove nell'ambito della teoria della viscosità lineare, definita nel modo seguente:

- Deformazione viscosa proporzionale alla tensione secondo un coefficiente di proporzionalità; questo è funzione almeno dell'istante di applicazione della tensione, oltre che, della rigidità assiale elastica dell'elemento e della durata dell'applicazione, ma non dalla tensione, il che consente la sovrapposibilità degli effetti (si suppone di considerare un elemento prismatico di calcestruzzo, sottoposto ad una compressione $\sigma = \sigma_0 = \text{cost}$, applicata a partire dal tempo t' , con σ inferiore al 40 – 60% della resistenza a compressione).
- Proporzionalità fra tensione dovuta agli effetti viscosi ed una dilatazione impressa $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{cost}$, con modalità analoghe a quelle del caso descritto prima (affermazione duale rispetto alla precedente).
- Dilatazione trasversale (unica se il materiale è isotropo) legata alla dilatazione longitudinale dal medesimo coefficiente, sia per la parte elastica, sia per la parte viscosa; in modulo di Poisson in fase viscosa conserva così il medesimo valore istantaneo che si ha in fase elastica (il suo ordine di grandezza è 0.15 – 0.30).

Si ritiene poi, pur intendendo usualmente come comportamento viscoso del calcestruzzo in stato monoassiale, quello che si ha sotto sollecitazione di compressione e corrispondente accorciamento, che i risultati possano essere ritenuti validi anche per le sollecitazioni di trazione e relativi

allungamenti, se si fa l'ipotesi di restare sufficientemente lontani dalla fessurazione, (per la linearità del comportamento, si richiede che la tensione di trazione non superi l'80% circa della resistenza a trazione).

Infine si suppone che il materiale sia isotropo.

Queste due ultime ipotesi richiedono che: - per applicare le relazioni matematiche esaminate, nelle strutture non si producano fessurazioni; - la disposizione delle armature metalliche, nonché le modalità di getto, costipamento, presa e maturazione, siano tali da consentire di considerare il materiale localmente isotropo e omogeneo. Nel campo della viscosità lineare, il modo di rappresentazione di validità generale atto a descrivere il comportamento viscoso del calcestruzzo è quello basato sui nuclei Φ di scorrimento e Ψ di rilassamento, mediante i quali si possono stabilire le relazioni differenziali:

$$d\varepsilon_w = \varepsilon_e(t')\Phi(t,t')dt' = \frac{\sigma(t')}{E_0(t')} \Phi(t,t')dt' \quad (3.1)$$

$$d\sigma_c(t,t') = -\sigma_e(t')\Psi(t,t')dt' = -\varepsilon(t')E_0(t')\Psi(t,t')dt' \quad (3.2)$$

dove vengono indicati con (c) ed (e) gli indici delle grandezze puramente viscoso o elastiche; E_0 è il modulo istantaneo di elasticità; t è il tempo corrente, t' è il tempo di applicazione del carico. Si ha quindi $t' \leq t$; dt' è la

durata di applicazione della deformazione $\varepsilon_e(t')$. $\sigma_e(t')$ sono le sollecitazioni elastiche prodotte.

Tale modo di rappresentazione può essere assunto, effettivamente, come quello di validità generale, ove si lasciano indeterminate le forme dei nuclei viscosi, Φ e Ψ . A seconda delle forme date a questi ultimi, si potranno ottenere le diverse teorie della viscosità lineare.

La prima di esse è la teoria dell'ereditarietà messa a punto dai Reologisti si veda ad esempio: (Migliacci, 1971; Nowacki, 1965), caratterizzata da:

- Equazione differenziale (modello reologico) definita dal comportamento elasto-viscoso lineare del materiale in uno schema determinato, immutabile nel tempo, (in particolare i nuclei viscosi risultano essere funzioni unicamente dell'intervallo di tempo $(t - t')$ intercorso fra l'istante t' di applicazione del carico e l'istante $t \geq t'$ di lettura degli effetti differiti prodotti).
- Nuclei "ereditari" generalmente assegnati come somma di funzioni esponenziali "smorzate".

La seconda teoria è la così detta teoria dell'invecchiamento, impiegata da moltissimi autori (si veda ad esempio, Migliacci, 1971; Franciosi, 1961) e definita da:

- Medesimo andamento temporale del fenomeno viscoso dopo un certo tempo dall'applicazione delle sollecitazioni, qualunque sia stato l'istante iniziale di applicazione delle sollecitazioni (ciò conduce alla caratterizzazione del punto successivo).

- Nuclei viscosi funzioni del solo tempo t' di applicazione di ogni sollecitazione successiva e non dell'intervallo di tempo che dovrà intercorrere fra tale tempo t' ed il tempo t di lettura (purché ci si metta sufficientemente avanti nel tempo). Nel caso più generale tali nuclei "istantanei" sono dati dalla somma di funzioni esponenziali "smorzate".

Conseguentemente il comportamento viscoso di tipo sensibilmente ereditario, tipico dei calcestruzzi piuttosto stagionati, non può in tal modo essere descritto da nuclei funzione del solo t' , né pure è descrivibile il fenomeno dell'elasticità differita.

La terza teoria è la così detta teoria dell'ereditarietà e dell'invecchiamento (Arutunian, 1957), in cui si considerano:

- Invecchiamento in età avanzata, con caratteristiche viscoso ereditarie
- Nuclei viscosi funzioni generiche dei tempi t e t' ; in essi si può sempre distinguere una parte ereditaria, che, al solito, è di tipo esponenziale smorzato, e una parte che descrive l'invecchiamento, decrescente con l'istante di applicazione della sollecitazione.

Per quanto detto, la teoria dei nuclei Φ e Ψ costituisce una sintesi di tutti i diversi modi di rappresentazione del fenomeno viscoso.

3.2.1 *Modo di rappresentazione basato sui nuclei viscosi*

Si consideri uno stato di sollecitazione monoassiale, caratterizzato dal comportamento viscoso di un elemento prismatico isolato di calcestruzzo isotropo, nel campo della viscosità lineare, attraverso le funzioni di “influenza” positive $\Phi(t,t')$ e $\Psi(t,t')$. Dall'integrazione delle (3.1),(3.2) si può scrivere:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \int_0^t \varepsilon_e(t')\Phi(t,t')dt' = \frac{\sigma(t)}{E_0(t)} + \int_0^t \sigma(t') \frac{\Phi(t,t')}{E_e(t')} dt' \quad (3.3)$$

$$\sigma(t) = \sigma_e(t) + \int_0^t \sigma_e(t')\Psi(t,t')dt' = \varepsilon(t)E_0(t) - \int_0^t \varepsilon(t')E_e(t')\Psi(t,t')dt'$$

L'idea di esprimere il comportamento elasto-viscoso del calcestruzzo attraverso un'equazione integrale, assumendo per il suo nucleo funzioni generiche dei tempi t e t' , risale a (Maslov, 1941). Le (3.3) possono essere interpretate come equazioni integrali di Volterra (rispetto al tempo), rispettivamente delle incognite $\sigma(t)$ ed $\varepsilon(t)$. Tra i nuclei Φ e Ψ , che caratterizzano in modo, per così dire, duale il comportamento viscoso del materiale, esiste una relazione integrale, in modo tale che, dato uno dei due nuclei, si può ricavare l'altro e viceversa (in sostanza uno solo, dei due nuclei, è indipendente).

Se consideriamo uno stato di sollecitazione triassiale attraverso un elemento cubico isolato di calcestruzzo isotropo, le funzioni di influenza, definito il comportamento viscoso spaziale divengono;

$\Phi(t,t')$ e $\Psi(t,t')$ rispettivamente per lo scorrimento ed il rilassamento longitudinale; $v_v(t,t')$ per la contrazione laterale viscosa;

$\Phi_T(t,t')$ e $\Psi_T(t,t')$ per lo scorrimento e il rilassamento di "taglio" (indicato con l'indice T).

Mediante queste si possono scrivere relazioni integrali simili alle (3.3). Fra i nuclei Φ_T e Ψ_T che caratterizzano in modo duale il comportamento viscoso del materiale a taglio, esiste un legame integrale simile ai legami che si hanno fra i nuclei Φ e Ψ . In tal modo, sono tre le funzioni in gioco, ad esempio $\Phi(t,t')$, $\Phi_T(t,t')$ e $v_v(t,t')$, che risultano fra loro indipendenti.

Ricordando che fra i moduli tangenziale e longitudinale, in campo elastico, vale la relazione:

$$G_0(t') = \frac{E_0(t')}{2[1 + \nu(t')]} \quad (3.4)$$

(dunque si possono assegnare due sole delle tre funzioni elastiche), si consideri l'analogia in campo viscoso:

$$\Phi_T(t, t') = \Phi(t, t') \frac{1 + \nu_v(t, t')}{1 + \nu(t')} \quad (3.5)$$

Pertanto, il comportamento viscoso “spaziale” di un materiale isotropo risulta caratterizzato da due sole funzioni, ad esempio $\Phi(t, t')$ e $\nu_v(t, t')$. Potendo ammettere la viscosità lineare e quindi: $\nu_v(t, t') = \nu(t)$, dalla (3.5) si deduce $\Phi_T = \Phi$, cioè risulta sufficiente una sola funzione per caratterizzare il comportamento viscoso spaziale del materiale: conseguentemente, il problema della contrazione trasversale in campo viscoso risulta semplificato.

3.2.2 Teoria dell'ereditarietà

In generale i fenomeni della viscosità e del rilassamento sono rappresentati, nel caso monodimensionale, come una “variazione” della legge elastica $\sigma = E(t, t')\epsilon$.

Queste funzioni nella formulazione classica della teoria dell'ereditarietà possono essere chiamate funzioni di scorrimento o di creep $f(t)$ e funzioni

di rilassamento $r(t)$. Queste funzioni sono variabili sia rispetto al tempo corrente t che rispetto al tempo di applicazione del carico t' .

La formulazione generale risulta:

$$\varepsilon(t) = \sigma(0)f(t) + \int_0^t d\sigma(t')f(t-t') \quad (3.6)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon(0)r(t) + \int_0^t d\varepsilon(t')r(t-t') \quad (3.7)$$

A queste si possono aggiungere le funzioni “memoria” di scorrimento e rilassamento: $F(t)$, $R(t)$; che modificano le (3.6) (3.7):

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) \frac{1}{E_0} + \int_0^t \sigma(t')F(t-t')dt' \quad (3.8)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)E_0 + \int_0^t \varepsilon(t')R(t-t')dt' \quad (3.9)$$

In cui $E_0 = E(t=0)$ modulo elastico a inizio analisi. Da queste equazioni si possono ricavare le funzioni dei nuclei viscosi e di rilassamento attraverso le relazioni:

$$\Phi(t, t') = E_0 F(t-t') \quad e \quad \Psi(t, t') = R(t-t') / E_0 \dots\dots\dots (3.10)$$

Un metodo impiegato per la determinazione delle funzioni di scorrimento e di rilassamento è quello che utilizza i modelli di Kelvin – Voigt Fig. 19 a) e di Maxwell Fig. 19 b), riconosciuti come i più semplici modelli capaci di descrivere, rispettivamente, il fenomeno di scorrimento (viscosità) e di rilassamento nei calcestruzzi.

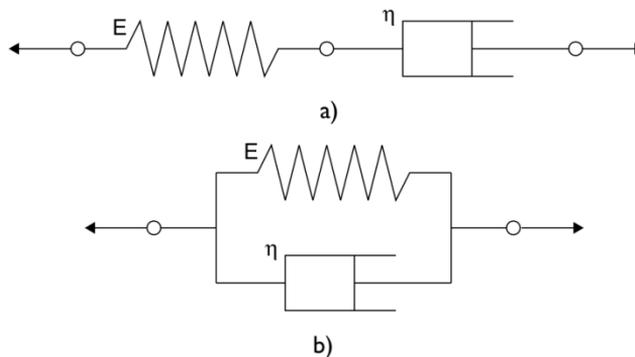


Fig. 19 Elemento di Kelvin-Voigt a), Elemento di Maxwell b)

Il modello di Kelvin-Voigt considera, per la rappresentazione degli “effetti lenti” una serie di molle e dissipatori collegati in serie, mentre il modello di Maxwell utilizza molle e dissipatori collegati in parallelo.

La generalizzazione dei modelli sopra indicati per poter rappresentare il fenomeno di creep o di rilassamento si effettua inserendo una molla in serie ad m elementi di (K -V); o una molla in parallelo ad m elementi di (M). In entrambi i casi ci saranno $(2m+1)$ incognite da risolvere; $(2m)$ in quanto ogni modello utilizzato ha al suo interno una molla e un dissipatore, mentre il $+1$ rappresenta la molla aggiuntiva del modello generalizzato).

Se si considera ancora il modello ereditario, le funzioni di scorrimento e di rilassamento divengono:

$$f(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i} \left(1 - \exp\left(\frac{E_i}{\eta_i} t\right) \right) \quad (3.11)$$

mentre per la funzione di rilassamento si ottiene:

$$r(t) = E_0 - \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i} \left(1 - \exp\left(\frac{E_i}{\eta_i} t\right) \right) \quad (3.12)$$

quindi come detto precedentemente i parametri da determinare (le $2m + 1$ incognite) sono: E_0 , E_i e le η_i . Normalmente si stabiliscono gli m tempi di scorrimento $\tau_i^* = \eta_i / E_i$, o quelli di rilassamento $T_i^* = \eta_i / E_i$, e il parametro elastico E_0 .

Considerando (Troost, 1966) le funzioni di scorrimento e di rilassamento utilizzando i modelli sopraccitati vengono posti in una forma equivalente alle (3.11), e (3.12):

$$f(t) = \frac{1}{E_0} \left[1 + \varphi_\infty \sum_{i=1}^m \nu_i \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^*}\right) \right) \right] \quad (3.13)$$

$$r(t) = E_0 \left[1 - \psi_\infty \sum_{i=1}^m \nu_i \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T_i^*}\right) \right) \right] \quad (3.14)$$

essendo:

$$\varphi_\infty = E_0 \frac{\sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i}}{\sum_{i=1}^m \nu_i} = E_0 \sum_{i=1}^m \frac{1}{E_i} \quad (3.15)$$

$$\psi_{\infty} = \frac{1}{E_0} \frac{\sum_{i=1}^m E_i}{\sum_{i=1}^m \nu_i} = \frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^m E_i \quad (3.16)$$

le misure asintotiche, rispettivamente del fenomeno viscoso e di quello di rilassamento prodotti da sollecitazioni costanti, considerando con E_i il modulo elastico o dell' i -esima unità di Kelvin–Voigt, contenuta nel modello di Fig. 20 a) o quello dell' i -esima unità del modello di rilassamento Fig. 20 b) e con ν_i il coefficiente di dissipazione corrispondente.

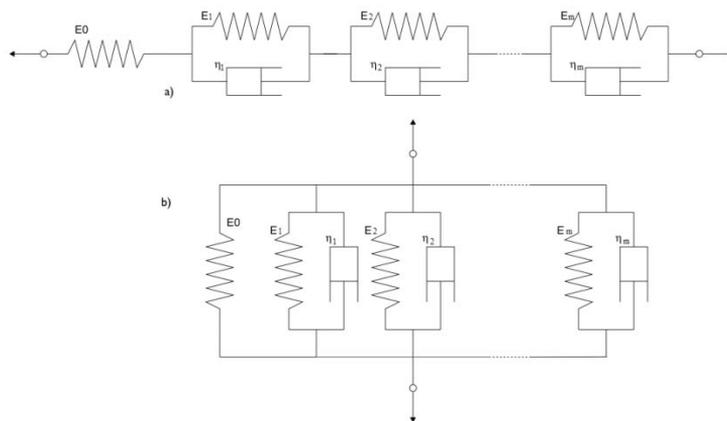


Fig. 20 Serie di K-V a) Serie di Maxwell b)

dove:

$$E_i = \frac{E_0}{\varphi_\infty V_i} \quad (3.17)$$

oppure:

$$E_i = E_0 \psi_\infty V_i' \quad (3.18)$$

Poiché valgono le:

$$\sum_{i=1}^m V_i = 1, \quad \sum_{i=1}^m V_i' = 1 \quad (3.19)$$

i parametri che vengono stabiliti liberamente, in modo da far corrispondere al meglio i risultati teorici con quelli sperimentali sono:

- gli m tempi di scorrimento τ_i^* o di rilassamento T_i^* ;

- il valore del parametro elastico E_0
- quello del fenomeno viscoso asintotico φ_∞ oppure ψ_∞ ,
- gli m parametri v_i oppure v_i' ;

per un totale di $(2m + 1)$ parametri, come si era accennato in precedenza.

In questo modo si può ottenere una buona corrispondenza (che vale per ogni singolo calcestruzzo e per ogni istante t' di applicazione del carico); peraltro il modello sarà più in grado di descrivere il fenomeno di scorrimento o di rilassamento eseguiti sotto sollecitazioni applicate a partire da tempi diversi dall'istante t' e, ad esempio, la legge di deformazione $\varepsilon(t)$ sotto una tensione variabile nel tempo ($\sigma = \sigma(t')$) fra le curve di scorrimento o di rilassamento teoriche e quelle sperimentali già per $m = 4$.

Le migliori corrispondenze teorico – sperimentali di tale modello potranno dunque ottenersi solo in età avanzata, quando praticamente il modulo E_0 è ormai costante e l'invecchiamento esaurito. Applicando questo modello e considerando le espressioni dei nuclei viscosi si possono ottenere:

$$\Phi_{KV} = \varphi_\infty \sum_{i=1}^m \frac{v_i}{\tau_i^*} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_i^*}\right) \quad (3.20)$$

$$\Psi_M = \psi_\infty \sum_{i=1}^m \frac{v_i}{T_i^*} \exp\left(-\frac{t-t'}{T_i^*}\right) \quad (3.21)$$

Questi nuclei garantiscono al problema elasto–viscoso l'esistenza di una sola soluzione limitata e dotata di asintoto finito, che è pure l'estremo superiore ed inferiore dei valori che la soluzione assume nel tempo.

Considerando poi, analogamente, uno stato pluriassiale e non più monoassiale (Migliacci, 1971), si perviene all'enunciazione del cosiddetto principio di corrispondenza: la relazione tra le grandezze in fase elasto–viscosa sono deducibili dalle relazioni valide per le corrispondenti grandezze elastiche, sostituendo, al posto degli sforzi e delle deformazioni, le trasformate di Laplace degli sforzi e delle deformazioni e al posto delle caratteristiche E_e e v_e (costanti in fasi elastica), le trasformate delle caratteristiche E e v (variabili nel campo elasto - viscoso).

3.2.3 *Modello di creep applicato al calcestruzzo*

La deformazione totale di un provino di calcestruzzo soggetto ad un carico assiale, al tempo t , può essere rappresentata in forma additiva considerando diversi contributi. Nel caso in cui si voglia tener conto degli effetti elastici istantanei e degli effetti lenti possiamo scrivere:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t) + \varepsilon_c(t) + \varepsilon_{sh}(t) \quad (3.22)$$

dove: ε_0 è la deformazione elastica istantanea, ε_c la deformazione viscosa ε_{sh} quella dovuta al ritiro. In questo primo studio è stato quindi considerato un modello per il calcestruzzo che tiene conto come descritto in (3.22) solo gli effetti elasto-viscosi e di ritiro. Per una migliore caratterizzazione del materiale, è possibile impiegare modelli più complessi (Majorana & Salomoni, 2010, 1694-1712) che tengono conto anche dell'igrometria del calcestruzzo, considerando la sua natura di materiale poroso, nonché l'eventuale danneggiamento raggiunti i limiti di resistenza del materiale. Anche se il modello studiato risulta semplificato, come sarà possibile vedere successivamente dal confronto con i dati sperimentali, esso è comunque in grado di rappresentare correttamente i fenomeni differiti.

Si considerano, in questa sede, deformazioni viscosse prodotte da tensioni costanti. Misurando le deformazioni sui provini caricati con differenti valori di carico, e rappresentando le isocore di creep, cioè le curve tensione deformazione per prefissati valori della durata del carico, si vede che, per tensioni inferiori a 0.4 volte la resistenza massima del materiale (cioè all'interno del così detto "service stress range") queste curve sono approssimativamente lineari, e si può quindi scrivere:

$$\varepsilon(t) = \sigma J(t, t') \quad (3.23)$$

dove σ rappresenta la tensione monoassiale, ε la deformazione monoassiale, t il tempo, che normalmente viene scelto con l'età del calcestruzzo, e $J(t, t')$ è la funzione di creep.

Questa funzione rappresenta la deformazione elastica più quella viscosa al tempo t , supponendo una tensione monoassiale costante e unitaria applicata al tempo t' .

In regime lineare, la deformazione viscosa, prodotta da una tensione monoassiale, è caratterizzata dalla funzione $J(t, t')$. La tipica forma di questa funzione è riportata in Fig. 21.

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI
INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

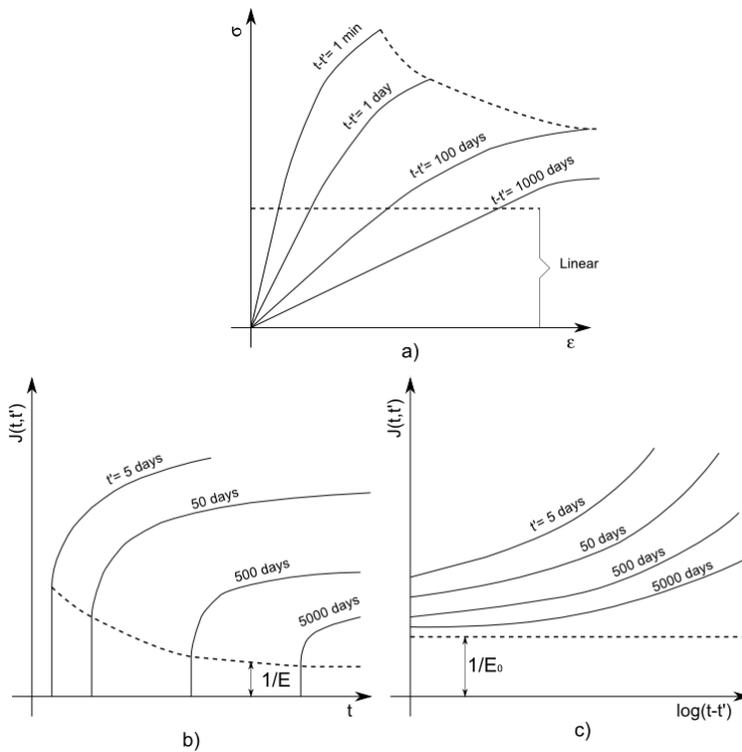


Fig. 21 a) diagramma tensione deformazione al variare del tempo di inizio carico
b) funzione di creep c) diagramma semi logaritmico della funzione di creep.

L'algoritmo generale per la rappresentazione del legame tensioni deformazioni nel caso di un materiale visco-elastico verrà definito più avanti nel capitolo.

3.2.4 Modello B3

Per la caratterizzazione del comportamento del materiale calcestruzzo nel lungo periodo si deve definire una legge di creep specifica del materiale. Un'ottima rappresentazione della funzione di viscosità è data dal modello di derivazione sperimentale, denominato B3, sviluppato da Z.P. Bazant in (Bazant & Murphy, 1995, 357-365; Bazant & Baweja, 2000, 1-83) dove, considerando tutte le grandezze rappresentate attraverso il SI la funzione di creep viene descritta come:

$$J(t, t') = q_1 + C_0(t, t') + C_d(t, t', t_0) \quad (3.24)$$

in cui q_1 coincide con $1/E_0$ e rappresenta l'effetto elastico istantaneo, C_0 è la funzione di basic creep, C_d è la funzione di drying creep. Bazant consiglia di utilizzare come $q_1=0.6/E_{cm28}$ prendendo come E_{cm28} il modulo elastico del cls a 28 giorni. Indicando con f_{cm28} la resistenza a compressione media del calcestruzzo a 28 giorni possiamo determinare il modulo elastico come: $E_{cm28} = 4734 \sqrt{f_{cm28}}$.

Si ottiene quindi la deformazione elastica della (3.22) come:

$$\varepsilon_0 = \sigma q_1 = \frac{\sigma}{E_0} \quad (3.25)$$

Per la determinazione del basic creep l'espressione di C_0 risulta:

$$C_0(t, t') = q_2 \cdot Q(t, t') + q_3 \cdot \ln \left[1 + (t - t')^n \right] + q_4 \cdot \ln \left(\frac{t}{t'} \right) \quad (3.26)$$

Il termine $q_2 \cdot Q(t, t')$ è la parte di creep imputabile all'invecchiamento del materiale determinabile attraverso le relazioni:

$$q_2 = 185.4 \times 10^{-6} c^{0.5} f_{cm28}^{-0.9} \quad (3.27)$$

in cui il termine c è il contenuto di cemento nell'impasto.

$$\begin{aligned}
 Q(t, t') &= Q_f(t') \left[1 + \left(\frac{Q_f(t')}{Z(t, t')} \right)^{r(t')} \right]^{-1/r(t')} \\
 Q_f(t') &= \left[0.086(t')^{2/9} + 1.21(t')^{4/9} \right]^{-1} \\
 Z(t, t') &= (t')^{-m} \ln \left[1 + (t - t')^n \right] \\
 r(t') &= 1.7(t')^{0.12} + 8
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Normalmente i coefficienti m e n hanno valore rispettivamente pari a 0.5 e 0.1 (Bazant & Baweja, 2000, 1-83).

Il termine q_3 dipende dagli effetti non invecchianti di creep:

$$q_3 = 0.29(w/c)^4 q_2 \tag{3.29}$$

ove il rapporto w/c è il rapporto acqua cemento dell'impasto. Il termine q_4 della (3.26) indica "l'aging flow compliance parameter" assunto pari a:

$$q_4 = 20.3 \times 10^{-6} (a/c)^{-0.7} \tag{3.30}$$

avendo indicato con a/c il rapporto aggregato cemento della pasta cementizia.

Il drying creep è la viscosità dovuta alla variazione di umidità interna nel cls. Questo dipende quindi dalle caratteristiche del calcestruzzo e dall'umidità ambientale R_H . Bazant descrive una legge di umidità media variabile in tempo $H(t)$ che tiene conto della superficie esposta del calcestruzzo all'ambiente.

$$C_d(t, t', t_0) = q_5 \cdot \left\{ \exp[-8H(t)] - \exp[-8H(t')] \right\}^{0.5} \quad (3.31)$$

ove t_0 è il tempo in cui si fa partire l'essiccamento del cls.

Il parametro q_5 viene definito attraverso l'equazione:

$$q_5 = 0.757 f_{cm28}^{-1} \left| \varepsilon_{sh\infty} \times 10^6 \right|^{-0.6} \quad (3.32)$$

Il termine $\varepsilon_{sh\infty}$ è la deformazione a tempo infinito dovuta al ritiro del materiale. Questa deformazione può essere determinata attraverso le equazioni:

$$\varepsilon_{sh\infty} = -\varepsilon_{s\infty} \frac{E_{cm607}}{E_{cm(t'+\tau_{sh})}} \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_{s\infty} = -\alpha_1 \alpha_2 \left[0.019 w^{2.1} f_{cm28}^{-0.28} + 270 \right] \times 10^{-6}$$

I coefficienti α_i sono riportati in (Bazant & Baweja, 2000, 1-83) a seconda del tipo di cemento utilizzato. Il termine w è il contenuto d'acqua nell'impasto; mentre per E_{cm607} si intende il modulo elastico a 607 giorni determinabile attraverso la relazione:

$$E_{cmt} = E_{cm28} \left(\frac{t}{4 + 0.85t} \right)^{0.5} \quad (3.34)$$

La funzione $H(t)$ nel caso in cui non si considerino modelli più complessi quali ad esempio quelli igro-meccanici in cui l'umidità dell'elemento di calcestruzzo venga calcolata come una variabile del problema, come avviene ad esempio in (Xotta & Salomoni, 2010), può essere ricavata da formule derivanti da dati sperimentali. Bazant utilizza l'equazione:

$$H(t) = 1 - (1-h)S(t) = 1 - (1-h) \tanh \left(\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau_{sh}}} \right) \quad (3.35)$$

$$H(t') = 1 - (1-h)S(t) = 1 - (1-h) \tanh \left(\sqrt{\frac{t'-t_0}{\tau_{sh}}} \right)$$

dove $\tau_{sh} = 0.085 t_0^{-0.08} f_{cm28}^{-0.25} [2k_s (V/S)]^2$

Il termine V/S è il rapporto tra il volume dell'elemento in calcestruzzo e la superficie esposta all'umidità ambientale. Il coefficiente k_s è un fattore di correzione che si può trovare in (Bazant & Baweja, 2000, 1-83).

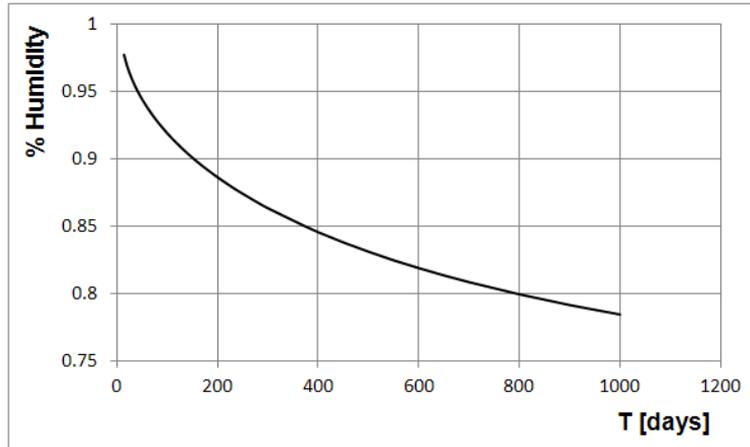


Fig. 22 Umidità vs. Tempo

Se consideriamo ad esempio un elemento di calcestruzzo con un rapporto $V/S=100.0\text{mm}$, soggetto ad un'umidità ambientale $R_H = 70\%$, caricato a $t' = 14$ giorni, mentre il tempo di inizio essiccamento risulta di $t_0 = 7$ giorni, la variazione di umidità secondo il modello B3 è quella riportata nel grafico in Fig. 22. Con questa formulazione si assume che tutta la sezione considerata nel rapporto V/S abbia la stessa umidità interna e vari istantaneamente allo stesso modo.

È quindi possibile ricavare Φ attraverso la relazione:

$$\Phi(t, t') = E(t')J(t, t') - 1 \quad (3.36)$$

Mentre la deformazione dovuta al ritiro ε_{sh} viene valutata in (Bazant & Baweja, 2000, 1-83) attraverso la relazione:

$$\varepsilon_{sh}(t, t') = -\varepsilon_{sh\infty} k_h S(t - t') \quad (3.37)$$

con:

$$S(t-t') = \tanh \left(\sqrt{\frac{(t-t')}{\tau_{sh}}} \right) \quad (3.38)$$

3.2.5 *Esempio*

Nel codice ad elementi finiti sviluppato in questo lavoro per la simulazione del comportamento del calcestruzzo è stato impiegato un modello costitutivo elastoviscoso seguendo le indicazioni della teoria B3 descritta nel paragrafo precedente.

La funzione che restituisce il modulo elastico modificato nel tempo viene proposta in appendice (Box 4).

L'esempio proposto di seguito ha il compito di valutare se l'algoritmo numerico riesce a simulare in modo corretto il modello analitico di Bazant. Le caratteristiche del materiale impiegato sono riportate in Tab. 4.

<i>Modulo elastico iniziale</i>	27318.0MPa
<i>Poisson</i>	0.00
R_H	0.7
t'	14gg
<i>Contenuto di cemento c</i>	409.0kg/m ³
<i>Contenuto d'acqua w</i>	205.0kg/m ³
<i>Contenuto di aggregato a</i>	1730.0kg/m ³
f_{cm}	33.3MPa
n	0.1
m	0.5
V/S	100.0
ε_{sh^∞}	0.0078

Tab. 4 Caratteristiche del Materiale

e fanno riferimento ad uno degli esempi proposti da Bazant in (Bazant & Baweja, 2000, 1-83), validati da prove sperimentali.

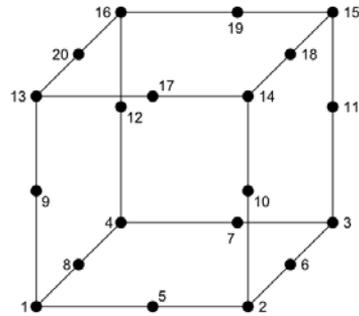


Fig. 23 Brick 20 nodi elastoviscoso

La funzione di creep non dipende né dalla geometria della sezione di calcestruzzo né dallo stato tensionale quindi il modello numerico utilizza un solo elemento brick a 20 nodi soggetto ad un carico costante, Fig. 23. L'esempio ha quindi solo il compito di validare l'implementazione numerica dell'elemento finito.

Come possiamo vedere in Fig. 24 il diagramma di confronto della funzione di creep ottenuta tra il modello analitico di Bazant e l'implementazione numerica sviluppata, risulta essere molto buona.

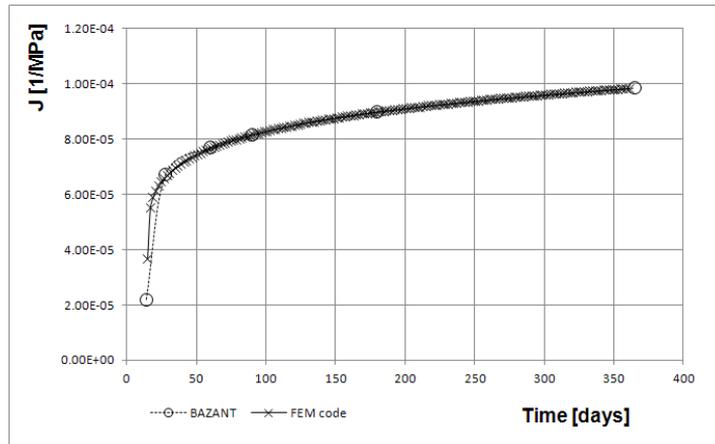


Fig. 24 Confronto della funzione di creep J tra il modello teorico B3 e il modello numerico

3.3 FRP

Se si considera l'FRP come un materiale composito realizzato dall'insieme di fibre immerse in una matrice (l'adesivo), possiamo generalmente affermare che gli effetti differiti sono da imputare prevalentemente alla matrice. Questo è dovuto al fatto che per gli usi normali le fibre impiegate presentano un comportamento viscoso del tutto trascurabile, ma che nell'insieme matrice più fibra hanno l'effetto di "rallentare" il processo deformativo dell'adesivo.

I fenomeni di creep e di rilassamento presenti nei materiali polimerici sono da imputare al riordinamento molecolare quando il materiale viene sottoposto ad un'azione costante e prolungata nel tempo (McCrum & Buckley, 1999). In generale gli effetti viscoelastici dei polimeri risultano essere dipendenti dalla temperatura. Per lo studio dei fenomeni lenti su elementi in calcestruzzo rinforzati con fogli di FRP, considerando il campo di utilizzo di questa tecnica nell'ambito dell'ingegneria civile, si è studiato il problema in ipotesi isoterma assumendo una temperatura costante media ambientale. Questa assunzione può essere fatta considerando che la variazione di temperatura in questa tipologia di strutture risulta essere sia giornaliera che stagionale, comunque con tempi molto inferiori rispetto ai fenomeni viscosi oggetto di studio, che risultano avere una scala temporale di anni.

Il comportamento viscoso dei polimeri è quindi associato ad un flusso delle macromolecole che costituiscono il materiale stesso. Una tensione esterna applicata al polimero, conduce a deformazioni conseguenti il flusso molecolare e produce una "back stress" (o tensione interna applicata alle catene molecolari) cosicché quando la tensione esterna viene rimossa, la "back stress" inizia a diminuire nel tempo, fino al recupero completo della deformazione. Mentre se la tensione applicata permane indefinitamente la "back stress" aumenta gradualmente fino a raggiungerla. Raggiunto l'equilibrio tra tensione esterna e "back stress" la tensione totale del polimero risulta nulla e il creep si ferma.

Possiamo definire tre fasi di creep (Ascione & Berardi, 2006, 7-10): una deformazione elastica istantanea cui fa seguito una fase in cui la

deformazione cresce velocemente (creep primario); successivamente essa evolve con una velocità pressoché costante (creep secondario) in un intervallo di tempo generalmente più esteso. Può seguire, infine, una terza fase (creep terziario) che si verifica generalmente solo per valori elevati del tempo in cui le deformazioni crescono notevolmente con conseguente danneggiamento del materiale.

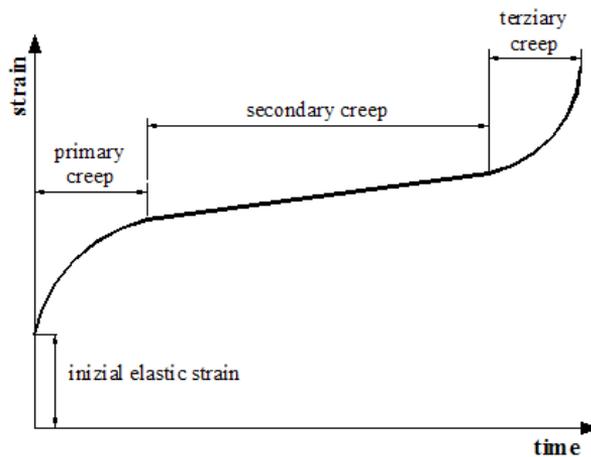


Figure 1 Andamento delle deformazioni nel tempo per modelli 1D

In letteratura sono presenti vari modelli per la determinazione degli effetti viscosi nell'interfaccia, ma in generale gli effetti differiti nei polimeri possono essere studiati nell'ambito della viscoelasticità lineare, basata sulle seguenti ipotesi:

- Linearità del legame tensione-deformazione nel tempo;
- Sovrapponibilità degli effetti.

Se consideriamo un modello monodimensionale, possiamo rappresentare la deformazione totale come la somma di un contributo elastico e uno differito nel tempo rappresentato attraverso incrementi di carico infinitesimi:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t')\phi(t, t') + \int_{t'}^t \phi(t, \xi) d\sigma(\xi) \quad (3.39)$$

dove ξ è il tempo compreso tra t' e t . La formulazione generale del creep può essere rappresentata quindi in modo analogo al calcestruzzo infatti la legge tensioni – deformazioni è del tutto analoga alla (3.3) o alla (3.6). Questo ha permesso di utilizzare lo stesso algoritmo risolutivo usato per il calcestruzzo, mediante la risoluzione delle equazioni di Volterra (come spiegato successivamente) andando però a definire la funzione di creep $J(t, t')$ specifica per il materiale FRP.

Un semplice modello applicabile è quello del modulo efficace (EM) (Berardi & Giordano, 2003), che adotta come espressione approssimante dell'integrale, il prodotto tra l'incremento dello stato tensionale che

avviene dal tempo t' al tempo t e il valore della funzione di viscosità $J(t, t')$.
Si ottiene quindi:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t')J(t, t') + [\sigma(t) - \sigma(t')]J(t, t') \quad (3.40)$$

in cui la funzione di viscosità viene assunta come una variazione del modulo elastico del tipo:

$$J(t, t') = \frac{(1 - \varphi(t))}{E(t')} \quad (3.41)$$

dove il coefficiente $\varphi(t)$ è il coefficiente di viscosità.

Componendo le ultime due equazioni si ottiene:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) \frac{(1 - \varphi(t))}{E(t')} = \frac{\sigma(t)}{E(t)} \quad (3.42)$$

Il coefficiente di viscosità può essere ricavato in vari modi a seconda della funzione di creep scelta. Per le resine, una teoria spesso utilizzata è quella ricavata sperimentalmente da Findley (Findley, 1987; Scott & Zureick, 1998, 1361-1369), che si basa su una espressione delle deformazioni nel tempo di tipo esponenziale:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t') + mt^n \quad (3.43)$$

dove il primo termine rappresenta la deformazione elastica, mentre il secondo coincide con la variazione delle deformazioni sotto carico costante. Come si può vedere facilmente dalla formulazione di Findley la deformazione viscosa è indipendente dal valore del carico applicato alla resina. I termini m , n sono coefficienti del materiale che devono essere assunti mediante prove sperimentali.

Attraverso questa formulazione possiamo ricavare il coefficiente di viscosità:

$$\varphi(t) = \frac{m}{\varepsilon(t')} t^n \quad (3.44)$$

3.3.1 *Modello di viscosità a fibre micromeccanico*

Modelli più complessi per la rappresentazione del composito matrice e fibre sono stati studiati da diversi autori, che hanno indagato il comportamento d'insieme del composito andando a studiare anche gli effetti dei singoli componenti. Il modello di J. Li e G.J. Weng in (Li & Weng, 1995, 589-598) ad esempio considera il composito caratterizzato da matrice, fibra nonché un effetto differito dovuto alla zona di transizione tra fibra e matrice. Un altro studio condotto da L. Ascione (Ascione & Berardi, 2006, 7-10), specifico per i compositi studiati in questo lavoro (strutture rinforzate con fibre in carbonio) analizza i fenomeni differiti attraverso la formulazione di funzioni di viscosità sia per matrice che per fibra, definendo un comportamento omogeneizzato del materiale attraverso una "media pesata" i cui pesi coincidono con la percentuale volumetrica dei componenti che formano il composito.

Le ipotesi iniziali sono:

- Perfetta aderenza tra i componenti, fibre e matrici.
- Comportamento viscoelastico di tipo lineare.

La seconda ipotesi è valida considerando che le sollecitazioni applicate risultino tali da non superare il 40% dei limiti di rottura del composito.

Considerando il caso monodimensionale e chiamando $\sigma_{mf}(t)$ la tensione presente nel composito matrice + fibra possiamo scrivere:

$$\sigma_{mf}(t) = \sigma_m(t)V_m^{\%} + \sigma_f(t)V_f^{\%} \quad (3.45)$$

dove $\sigma_m(t)$ è la tensione nella matrice, $\sigma_f(t)$ la tensione nelle fibre mentre $V_i^{\%}$ è la percentuale volumetrica di matrice $i=m$ e di fibre $i=f$.

Le deformazioni della matrice e della fibra devono essere le stesse, per congruenza, come indicato dalla relazione:

$$\varepsilon_f(t) = \varepsilon_m(t) \quad (3.46)$$

Utilizzando l'ipotesi di comportamento viscoelastico lineare la variazione di deformazione nel tempo nelle fibre e nella matrice può essere scritta come:

$$\begin{aligned}\varepsilon_m(t) &= \sigma_m(t')J_m(t,t') + \int_{t'}^t \frac{d\sigma_m(\xi)}{dt^*} J_m(t,\xi)d\xi \\ \varepsilon_f(t) &= \sigma_f(t')J_f(t,t') + \int_{t'}^t \frac{d\sigma_f(\xi)}{dt^*} J_f(t,\xi)d\xi\end{aligned}\quad (3.47)$$

Il termine ξ è il tempo nell'intervallo (t',t) . Le funzioni $J_{m,f}$ sono le funzioni di viscosità, rispettivamente per la matrice e per le fibre. Possiamo definire un'unica funzione di creep J_{mf} considerando:

$$J_{mf}(t,t') = V_f^{\%} J_f(t,t') + V_m^{\%} J_m(t,t') \quad (3.48)$$

Utilizzando l'uguaglianza tra le deformazioni del composito eq (3.46), e la funzione di creep J_{mf} possiamo scrivere la relazione:

$$\frac{\sigma_{mf}}{V_f^{\%}} J_f(t,t') - \sigma_m(t)J_{mf}(t,t) + \int_{t'}^t \sigma_m(t^*) \frac{dJ_{mf}(t,t^*)}{dt^*} dt^* = 0 \quad (3.49)$$

Questa equazione "integro-differenziale" ha come incognita la $\sigma_m(t)$.

La risoluzione può avvenire scegliendo un opportuno modello reologico.
In (Ascione & Berardi, 2006, 7-10)

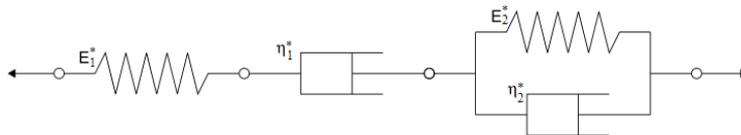


Fig. 25 Modello reologico a 4 parametri

viene impiegato un modello a 4 parametri (Fig. 25) composto da due molle elastiche e da 2 dissipatori viscosi grazie ai quali è possibile simulare il creep primario e il creep secondario.

Attraverso questo modello la deformazione può essere calcolata come:

$$\varepsilon_f(t) = \varepsilon_m(t) = \sigma_{mf}(t) \left[\left(\frac{1}{E_1^*} + \frac{t-t'}{\eta_1^*} \right) + \frac{1}{E_2^*} \left(1 - e^{-\frac{(t-t')E_2^*}{\eta_2^*}} \right) \right] \quad (3.50)$$

dove i termini con l'apice (*) indicano i componenti del modello reologico di Fig. 25.

Denominando:

$$c_1 = \frac{1}{E_1^*} ; c_2 = \frac{1}{\eta_1^*} ; c_3 = \frac{1}{E_2^*} ; c_4 = \frac{1}{\eta_2^*} \quad (3.51)$$

dalla (3.50) si ottiene:

$$J(t, t') = [c_1 + c_2(t - t')] + c_3 \left(1 - e^{-\frac{(t-t')c_4}{c_3}} \right) \quad (3.52)$$

Definita la funzione di viscosità per il modello reologico possiamo imporre l'uguaglianza di questa funzione con quelle rispettivamente della matrice e della fibra.

$$J_m(t, t') = [c_{1,m} + c_{2,m}(t - t')] + c_{3,m} \left(1 - e^{-\frac{(t-t')c_{4,m}}{c_{3,m}}} \right) \quad (3.53)$$

$$J_f(t, t') = [c_{1,f} + c_{2,f}(t - t')] + c_{3,f} \left(1 - e^{-\frac{(t-t')c_{4,f}}{c_{3,f}}} \right)$$

I termini c_{ij} sono riferiti al tipo di materiale considerato; con $j=m$ si definiscono i coefficienti del modello reologico della matrice, mentre con $j=f$ i coefficienti del modello reologico della fibra.

Volendo risolvere analiticamente l'equazione possiamo quindi scrivere l'equazione che determina la tensione nella matrice attraverso l'equazione:

$$\sigma_m(t) = h^*(t) + \int_0^t \sigma_m(\xi) k(t, \xi) d\xi \quad (3.54)$$

Dove:

$$h^*(t) = \frac{1}{J^*(t, t')} \frac{\sigma_{mf}(t')}{V_f^{\%}} J_f(t, t') \quad (3.55)$$

$$k(t, t') = \left[\frac{dJ_m(t, \xi)}{d\xi} + \frac{V_f^{\%}}{V_m^{\%}} \frac{dJ_f(t, \xi)}{dt^*} \right] / J^*(t, \xi)$$

L'equazione (3.54) può essere risolta attraverso la tecnica di trasformazione di Laplace (vedasi Box 2).

La trasformata di Laplace di una funzione $f(t)$ (definita per tutti i numeri reali e localmente integrabile) è una funzione lineare

che permette di passare dallo studio di una variabile (reale) "t" allo studio di una variabile complessa, e viceversa.

Consideriamo la funzione $f(t)$, la trasformata di Laplace consiste nella funzione $F(s)$ definita come:

$$F(s) = L(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.56)$$

Il vantaggio di effettuare questa trasformazione consiste nel fatto che l'integrale e la derivata della funzione $f(t)$ diventano, rispettivamente, una divisione e una moltiplicazione per $F(s)$.

Box 2 Trasformata di Laplace

Consideriamo il tempo di carico $t'=0$ e $k(t,\xi)=0$ quando $t < \xi$, si ha:

$$L(\sigma_m(t)) = L(h^*(t)) + L\left(\int_t^t \sigma_m(\xi) k(t, \xi) d\xi\right) \quad (3.57)$$

Attraverso il teorema della convoluzione possiamo ricavare:

$$L\left(\int_0^t \sigma_m(\xi)k(t, \xi)d\xi\right) = L(\sigma_m(t))L(k(t, \xi)) = \sigma_m(s)K(s) \quad (3.58)$$

Dove: $\sigma_m(s)$ è la trasformata di Laplace della funzione $\sigma_m(t)$, mentre $K(s)$ è la trasformata di Laplace della funzione $k(t, t')$.

Utilizzando quindi le trasformate di Laplace possiamo ricavare dalla (3.57) la soluzione dell'equazione di (3.49):

$$\sigma_m(s) = H(s) + K(s)\sigma_m(s) \quad (3.59)$$

Per ottenere nuovamente la variazione dello stato tensionale della matrice nel tempo si effettua l'inversa della trasformata di Laplace:

$$\sigma_m(t) = L^{-1}(\sigma_m(s)) \quad (3.60)$$

3.3.2 Effetto di Aging nell'FRP

Uno degli aspetti che in questi ultimi anni hanno portato ad un sempre maggior utilizzo di elementi in FRP nelle strutture civili, è stato quello di non essere soggetti a fenomeni quali la corrosione che le classiche armature in acciaio presentano. Studi quali quelli di Y. Chen et al in (Chen & Davalos, 2007, 101-111) hanno però dimostrato che l'effetto dell'invecchiamento risulta essere presente anche nelle resine epossidiche generalmente impiegate come matrice nei compositi fibrorinforzati. Per invecchiamento o "*aging*" si intende una variazione irreversibile delle caratteristiche fisiche del materiale, indipendentemente dal fatto che esso risulti soggetto a carichi applicati, ma condizionato solo dall'ambiente circostante (Hutchinson, 1995, 703-760).

Un grande numero di polimeri comunemente utilizzati, tra cui le resine che costituiscono la matrice nei compositi qui studiati, subiscono un degrado chimico a causa dell'esposizione a diverse condizioni ambientali quali

- Alte temperature (generalmente sopra i 100°C)
- Radiazioni energetiche
- Esposizione a gas corrosivi
- ...

Esposizioni a questi fenomeni alterano le catene di molecole, modificando le caratteristiche iniziali del materiale. Una causa molto comune di degrado avviene attraverso l'ossidazione che si verifica quando le catene si legano con l'ossigeno. Questo processo viene inoltre accelerato attraverso l'esposizione a radiazioni ultraviolette. Il fenomeno di aging

avviene sostanzialmente attraverso una rottura dei legami delle macromolecole costituenti la resina.

Si è visto ancora che elevati tenori di pH in soluzione acquosa presenti nei pori del calcestruzzo durante l'idratazione possono causare, nel lungo tempo, attacchi chimici alle fibre (Michelli & Nanni, 2004, 491-503).

In termini di caratteristiche meccaniche i fenomeni di invecchiamento nei polimeri intervengono su tutte le caratteristiche meccaniche. In particolare questo aspetto interviene sulla tensione limite di rottura che diminuisce nel tempo, nonché sul legame elastoviscoso.

Da vari studi effettuati si può vedere che il fenomeno di aging è fortemente legato a forti variazioni termiche (Michelli & Nanni, 2004, 491-503; McKenna, 1994, 169-189), che non saranno però prese in considerazioni in questo capitolo.

3.4 Modello Numerico

Si presenta ora il modello numerico per la risoluzione dell'equazione integro-differenziale che rappresenta i modelli di viscosità visti precedentemente. La funzione di viscosità $J(t,t')$ viene rappresentata in forma discreta attraverso unità di Maxwell collegate in parallelo. Lo schema può essere rappresentato in forma generica attraverso una serie di Dirichlet della seguente forma:

$$c(t) = c(t_0) + \sum_{j=1}^m c_j \exp(-t / \tau_j) \quad (3.61)$$

in cui c è il termine variabile nel tempo, t_0 è il tempo di inizio analisi che si associa al tempo di inizio carico, quindi si ha $t_0 = t'$. Il termine $c(t_0)$ coincide con la risposta elastica istantanea. Le m unità scelte per la rappresentazione della grandezza c variabile nel tempo, dovranno essere sufficienti a rappresentare tutta l'analisi temporale che si vuole studiare. Considerando che per $t=t'=t_0$ si deve ottenere la sola risposta elastica, normalmente viene impiegato un tempo di scorrimento iniziale τ_1 caratterizzato da valori molto piccoli, ad esempio $\tau_1=10^{-9}$ giorni; in questo modo il primo termine della serie risulta essere $c(t_0)$. La scelta dei tempi di scorrimento non è arbitraria in quanto si potrebbe generare un problema

malcondizionato (Bazant & Wu, 1974, 45-60). Un criterio generalmente impiegato è quello di utilizzare i valori di τ_j equidistanti sulla scala logaritmica, ad esempio secondo la legge $\tau_j = 10^j \tau_1$ (Bazant & Wu, 1974, 45-60).

Considerando t_{n+1} il tempo di fine analisi, il numero m di unità che possono essere impiegate coincidono con $m = \text{int}(\log(t_{n+1}/\tau_1)) + 1$.

Possiamo quindi definire la legge tensioni–deformazioni come visto precedentemente in (3.7) e (3.9) nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{D}(t_0)\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \int_{t_0}^t \frac{d}{dx} [\mathbf{D}(t - \xi)] \boldsymbol{\varepsilon}(\xi) d\xi \quad (3.62)$$

indicando con ξ la variabile tempo $t_0 \leq \xi \leq t$.

La soluzione all'equilibrio di un corpo tridimensionale elasto-viscoso, viene ricavata attraverso l'impiego del teorema dei lavori virtuali (Majorana, 1984; Majorana & Vitaliani, 1990, 773-784):

$$\int_{(S)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} \quad (3.63)$$

Si pensi di eseguire l'integrazione temporale con la tecnica alle differenze finite. Si suddivida, a tal proposito, la variabile temporale t , in n intervalli di ampiezza $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, considerando $t_1 = 0$ e $t_{n+1} = t$.

La relazione diventa:

$$\sigma(t_{n+1}) = \mathbf{D}(t_0)\boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}) - \int_{t_1}^{t_{n+1}} \frac{d}{dx} [\mathbf{D}(t_{n+1} - \xi)] \boldsymbol{\varepsilon}(\xi) d\xi \quad (3.64)$$

ovvero

$$\sigma(t_{n+1}) = \mathbf{D}(t_0)\boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}) - \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dx} [\mathbf{D}(t_{n+1} - \xi)] \boldsymbol{\varepsilon}(\xi) d\xi \quad (3.65)$$

Ciascun integrale contenuto nella sommatoria a secondo membro può essere approssimato come segue:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dx} [\mathbf{D}(t_{n+1} - \xi)] \boldsymbol{\varepsilon}(\xi) d\xi &\approx \frac{1}{2} [\boldsymbol{\varepsilon}(t_{i+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t_i)] \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{d\xi} [\mathbf{D}(t_{n+1} - \xi)] d\xi \\ &\approx \frac{1}{2} [\boldsymbol{\varepsilon}(t_{i+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t_i)] [\mathbf{D}(t_{n+1} - t_{i+1}) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_i)] \end{aligned} \quad (3.66)$$

per cui risulta:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t_{n+1}) &= \mathbf{D}(t_0) \boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\boldsymbol{\varepsilon}(t_{i+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t_i)] [\mathbf{D}(t_{n+1} - t_{i+1}) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_i)] \end{aligned} \quad (3.67)$$

Questa equazione fornisce una valutazione approssimata della tensione all'istante t_{n+1} , se sono noti i valori della deformazione agli istanti t_i (con $i=1,2,\dots,n+1$).

Nella relazione (3.67), la deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1})$ è però incognita.

Tale deformazione si può determinare ricorrendo all'equazione di equilibrio, posta nella forma espressa nella (3.63).

Esplicitando la tensione rispetto alla $\boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1})$ si previene alla:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}(t_{n+1}) &= \mathbf{D}(t_0)\boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}) \\
&\quad - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1})[\mathbf{D}(t_0) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_n)] \\
&\quad - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}(t_n)[\mathbf{D}(t_0) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_n)] \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}[\boldsymbol{\varepsilon}(t_{i+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t_i)][\mathbf{D}(t_{n+1} - t_{i+1}) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_i)]
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Il calcolo del termine contenente la sommatoria, posto al secondo membro della (3.68), richiede la conoscenza di tutte le deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}(t_i)$ (con $i=1,2,\dots,n$) ed è pertanto inadatta alla metodologia proposta. L'applicazione di questa relazione è possibile se associata ad un metodo che limiti il numero di termini $\boldsymbol{\varepsilon}(t_i)$ da memorizzare. Questo obiettivo si raggiunge se i termini della matrice viscoelastica vengono rappresentati mediante la (3.61) cioè mediante sviluppi in serie di Dirichlet.

Si può quindi scrivere:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} [\mathbf{D}(t_{n+1} - t_{i+1}) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_i)] [\boldsymbol{\varepsilon}(t_{i+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}(t_i)] \tag{3.69}$$

Sostituendo la (3.61) con la (3.69)

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \left[\mathbf{D}_0 + \sum_{j=1}^m \mathbf{D}_j \exp \left[-\frac{(t_{n+1} - t_{i+1})}{\tau_j} \right] - \mathbf{D}_0 - \sum_{j=1}^m \mathbf{D}_j \exp \left[-\frac{(t_{n+1} - t_i)}{\tau_j} \right] \right] [\boldsymbol{\varepsilon}(t_{i+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t_i)] \quad (3.70)$$

si ha ancora:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^m \mathbf{D}_j \left[\exp \left[-\frac{(t_{n+1} - t_{i+1})}{\tau_j} \right] - \exp \left[-\frac{(t_{n+1} - t_i)}{\tau_j} \right] \right] [\boldsymbol{\varepsilon}(t_{i+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t_i)] \right\} \quad (3.71)$$

Invertendo l'ordine delle sommatorie:

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \mathbf{D}_j \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left[\exp \left[-\frac{(t_{n+1} - t_{i+1})}{\tau_j} \right] - \exp \left[-\frac{(t_{n+1} - t_i)}{\tau_j} \right] \right] [\boldsymbol{\varepsilon}(t_{i+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t_i)] \right\} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \mathbf{D}_j \mathbf{q}_{j,n+1} \quad (3.72)$$

avendo posto

$$\mathbf{q}_{j,n+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \left[\exp \left[-\frac{(t_{n+1} - t_{i+1})}{\tau_j} \right] - \exp \left[-\frac{(t_{n+1} - t_i)}{\tau_j} \right] \right] [\boldsymbol{\varepsilon}(t_{i+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t_i)] \right\} \quad (3.73)$$

ottenendo alla fine:

$$\mathbf{q}_{j,n+1} = \exp \left[-\frac{(t_{n+1} - t_n)}{\tau_j} \right] \left\{ \left[1 - \exp \left[-\frac{(t_n - t_{n-1})}{\tau_j} \right] \right] [\boldsymbol{\varepsilon}(t_n) + \boldsymbol{\varepsilon}(t_{n-1})] + \mathbf{q}_{j,n} \right\} \quad (3.74)$$

L'equazione (3.68) può scriversi convenientemente, come segue:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}(t_{n+1}) &= \mathbf{D}(t_0)\boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}) \\
 &\quad - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t_n)][\mathbf{D}(t_0) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_n)] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \mathbf{D}_j \mathbf{q}_{j,n+1}
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

L'espressione (3.75) può dunque essere inserita nell'equazione di equilibrio che assume la forma:

$$\begin{aligned}
 &\int_{(S)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}(t_0) \boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}) dV \\
 &- \frac{1}{2} \int_{(S)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T [\mathbf{D}(t_0) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_n)] [\boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t_n)] dV \\
 &- \frac{1}{2} \int_{(S)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \sum_{j=1}^m \mathbf{D}_j \mathbf{q}_{j,n+1} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

nell'equazione di equilibrio (3.76) è incognita la deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1})$, ma essa può essere ricavata per via iterativa scrivendo la stessa espressione nel modo seguente:

$$\int_{(S)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}(t_0) \boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}) dV - \frac{1}{2} \int_{(S)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T [\mathbf{D}(t_0) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_n)] \boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1}) dV =$$

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} + \frac{1}{2} \int_{(S)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T [\mathbf{D}(t_0) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_n)] \boldsymbol{\varepsilon}(t_n) dV + \frac{1}{2} \int_{(S)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \sum_{j=1}^m \mathbf{D}_j \mathbf{q}_{j,n+1}$$
(3.77)

dalla quale si nota che la $\boldsymbol{\varepsilon}(t_{n+1})$ può essere ricavata calcolando la deformazione agli istanti precedenti, cioè risolvendo la (3.77), in successione per tutti i valori dell'indice n a partire dallo 0 fino a quello finale.

3.4.1 Procedimento risolutivo

L'algoritmo risolutivo (Majorana, 1984; Majorana & Vitaliani, 1990, 773-784), può essere riassunto ricorrendo al metodo degli elementi finiti nel seguente modo:

l'equazione di equilibrio, in ogni elemento, può essere scritta nella forma:

$$(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2) \delta_e(t_{n+1}) = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_{LM}$$
(3.78)

dove:

$$\mathbf{K}_1 = \int_{(S)} \mathbf{B}^T \mathbf{D}(t_0) \mathbf{B} dV \quad (3.79)$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{1}{2} \int_{(S)} \mathbf{B}^T [\mathbf{D}(t_0) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_n)] \mathbf{B} dV \quad (3.80)$$

sono le matrici di rigidezza locale dell'elemento della parte elastica e della parte viscosa. Vengono inoltre calcolate le "correzioni" delle forze nodali come:

$$\mathbf{F}_{LM} = \frac{1}{2} \int_{(S)} \mathbf{B}^T \left[[\mathbf{D}(t_0) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_n)] \boldsymbol{\varepsilon}(t_n) + \sum_{j=1}^m \mathbf{D}_j \mathbf{q}_{j,n+1} \right] dV \quad (3.81)$$

essendo \mathbf{B} la matrice delle derivate delle funzioni di forma.

3.4.2 Generalizzazione

Si vuole ora separare la matrice costitutiva viscosa per poter generalizzare il problema e renderlo applicabile a qualunque tipo di elemento finito. L'idea è quella di definire un'unica matrice \mathbf{D}^c che verrà utilizzata per la creazione della matrice di rigidezza locale \mathbf{K}^e .

Lo schema risolutivo iniziale visto nel precedente paragrafo, riferito ad un elemento, considera la creazione di due matrici di rigidezza locali definite dalla (3.79) e dalla (3.80), che può essere riscritta nella forma:

$$\mathbf{K}_2 = \int_{(S)} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^* \mathbf{B} dV \quad (3.82)$$

dove:

$$\mathbf{D}^* = \frac{1}{2} [\mathbf{D}(t_0) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_n)] \quad (3.83)$$

La rigidezza complessiva risulta:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2 \quad (3.84)$$

Questo comporta il calcolo di due matrici di rigidezza locali che verranno successivamente sottratte. Questo schema non è direttamente applicabile ad un elemento finito generico in quanto esso definisce la matrice di rigidezza locale attraverso una sola integrazione. Computazionalmente la procedura $(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2)$ risulta onerosa; basti pensare che l'integrale viene calcolato nei punti Gauss con una formula ricorsiva. Nel caso dei brick a 20 nodi con 27 punti Gauss il calcolo della matrice di rigidezza comporta 27+27 iterazioni.

Possiamo considerare le operazioni tra matrici:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C} \quad (3.85)$$

Quindi possiamo anche scrivere:

$$\mathbf{K}^e = \int_{(S)} [\mathbf{B}^T \mathbf{D}(t_0) \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}] dV = \int_{(S)} [\mathbf{B}^T (\mathbf{D}(t_0) - \mathbf{D}^*) \mathbf{B}] dV \quad (3.86)$$

In questo modo abbiamo trovato una nuova matrice costitutiva viscosa che può essere calcolata separatamente e successivamente utilizzata per la creazione della matrice di rigidità locale.

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^c &= \mathbf{D}(t_0) - \mathbf{D}^* = \mathbf{D}(t_0) - \frac{1}{2}[\mathbf{D}(t_0) - \mathbf{D}(t_{n+1} - t_n)] \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{D}(t_0) + \mathbf{D}(t_{n+1} - t_n)]\end{aligned}\tag{3.87}$$

ottenendo quindi:

$$\mathbf{K}^e = \int_{(S)} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^c \mathbf{B} dV\tag{3.88}$$

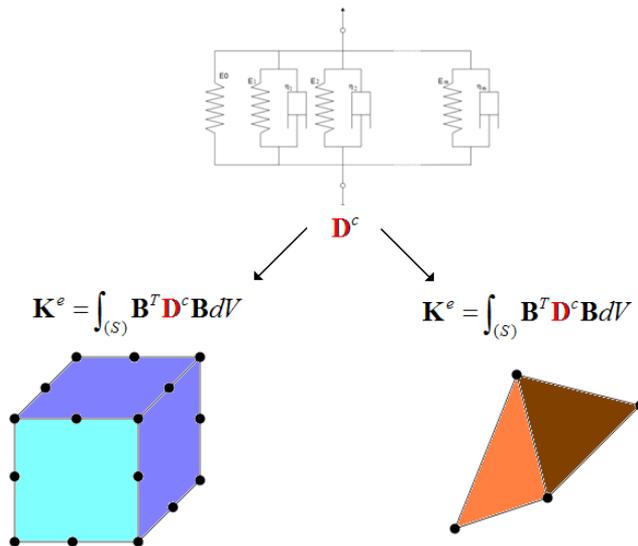


Fig. 26 Matrice di rigidezza locale con materiale viscoelastico definita per diverse tipologie di elemento finito

Come visibile dalla Fig. 26 la formula (3.88) risulta direttamente applicabile su ogni elemento finito implementato nel codice.

3.4.3 Calcolo della correzione del vettore delle forze

Considerando l'equazione (3.78) di equilibrio valida per ogni elemento; \mathbf{F}_e risulta essere il vettore dei carichi nei nodi, mentre il vettore \mathbf{F}_{LM} è la “correzione” dei carichi a causa degli effetti viscosi. Questo termine può essere calcolato nel solver transitorio in fase di assemblaggio tramite l'equazione:

$$\mathbf{F}_{LM} = \int_{(S)} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^* \boldsymbol{\varepsilon}(t_n) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \mathbf{D}_j \mathbf{q}_{j,n+1} dV \quad (3.89)$$

dove \mathbf{D}^* è la matrice ricavata in (3.83).

Nel vettore \mathbf{F}_{LM} compare il termine $\boldsymbol{\varepsilon}(t_n)$ cioè lo stato deformativo del passo precedente che quindi è il termine che dovrà essere salvato nel codice.

Nella viscosità si assume che il materiale sia perfettamente isotropo e che il coefficiente di Poisson rimanga costante nel tempo. Questo comporta un solo parametro variabile a causa della viscosità nella matrice costitutiva: il modulo di Young $E=E(t)$.

Per lo studio della viscosità si assume il comportamento rappresentato da catene di unità di Maxwell (una molla e un dissipatore in serie) collegate a loro volta in serie o in parallelo.

Considerando un collegamento in parallelo, l'equazione generale che ne deriva è quella di una sommatoria di funzioni esponenziali del tipo:

$$E(t) = E(t_0) + \sum_{j=1}^m E_j \exp(-t / \tau_j) \quad (3.90)$$

quindi la matrice $\mathbf{D}(t)$ è la matrice elastica in cui si sostituisce ad E il valore di E(t).

Il termine \mathbf{D}_j è quindi la matrice costitutiva valutata con il modulo elastico E_j dell'unità j-esima.

Box 3 Definizione della matrice $\mathbf{D}(t)$

il termine $\mathbf{q}_{j,n+1}$ viene calcolato con la seguente equazione:

$$\mathbf{q}_{j,n+1} = \exp\left[-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_j}\right] \left[1 - \exp\left[-\frac{\Delta t_n}{\tau_j}\right] \left[\boldsymbol{\varepsilon}(t_n) + \boldsymbol{\varepsilon}(t_{n-1}) \right] + \mathbf{q}_{j,n} \right] \quad (3.91)$$

dove: $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$

si può vedere che il vettore $\mathbf{q}_{j,n+1}$ dipende dal termine calcolato nello step precedente $\mathbf{q}_{j,n}$, che dovrà essere salvato dal codice per ogni step.

3.4.4 Valutazione dello spazio occupato

L'algoritmo per la risoluzione dell'equazione (3.62) comporta un notevole consumo di memoria occupata da parte del calcolatore.

Il vettore \mathbf{q} varia all'interno di ogni elemento in funzione del tensore di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ e del numero di unità di Maxwell utilizzate, nonché dal numero di punti Gauss. Si dovranno quindi salvare $totMaxwellUnit \times 6 \times totGauss \times totElem$ valori, dove 6 è la dimensione del tensore di deformazione salvato in forma vettoriale.

L'algoritmo richiede anche la conoscenza del tensore di deformazione del passo precedente $\boldsymbol{\varepsilon}_n$; il numero di dati da salvare è quindi: $6 \times totGauss \times totElem$.

All'aumentare della dimensione della discretizzazione i termini salvati potrebbero facilmente saturare la memoria occupata soprattutto nel caso in cui non sia stata sviluppata una programmazione in parallelo. E' quindi consigliabile salvare in file esterni i dati, e successivamente recuperarli in modo sequenziale in fase di assemblaggio.

3.5 Appendice

Il programma sviluppato in questo lavoro si può utilizzare per la modellazione del calcestruzzo tramite un modello costitutivo di tipo elastoviscoso attraverso la teoria B3 di Bazant.

Si riporta nel box seguente l'implementazione numerica del modello:

```
!creep: Bazant's model  
real*8 function youngModelB3(viscoMat,time)  
implicit none  
type(tViscoElastic):: viscomat  
real*8           :: time, t0, tc, tau_sh  
!internal  
real*8           :: q1,q2,q3,q4,q5  
real*8           :: J, C0, Cd  
real*8           :: n, m  
real*8           :: c  
real*8           :: fcm,e_sh,e_s_inf,e_sh_inf  
real*8           :: Z,r  
real*8           :: Q, Qf  
real*8           :: a_c, w_c  
real*8           :: RH, H, H0, S, S0  
real*8           :: alpha1, alpha2  
real*8           :: V_S  
real*8           :: kh,ks  
  
if (time<=viscoMat%loadTime) then
```

```

youngModelB3 = viscoMat%young0
else
!define J variabile
e_s_inf      = viscoMat%e_s_inf
n            = viscoMat%n_Coeff
m            = viscoMat%m_Coeff
w_c          = viscoMat%waterContent / viscoMat%cementContent
a_c          = viscoMat%aggregateContent / viscoMat%cementContent
t0           = viscoMat%loadTime
tc           = t0/2.d0
q1           = 0.6d0/viscoMat%young0
c            = viscoMat%cementContent
fcm          = viscoMat%fcm
RH           = viscoMat%RH
q2           = 185.4d0*0.000001d0*dsqrt(c)*fcm**(-0.9d0)
q3           = 0.29d0*w_c**(4)*q2
q4           = 20.3d0*0.000001d0*a_c**(-0.7d0)

Z            = viscoMat%loadTime**(-m)*log(1.d0+(time-t0)**n)
r            = 1.7d0*t0**(0.12d0)+8.d0
Qf           = 1/(0.086d0*t0**(2.d0/9.d0)+1.21d0*t0**(4.d0/9.d0))
Q            = qf*(1.d0+(Qf/Z)**(r))**(-1.d0/r)
C0           = +q2*Q+          &
              +q3*log(1.d0+(time-t0)**n) &
              +q4*log(time/t0)

!drain creep
if (rh==1.d0) then
  kh = -0.2d0
else if ((RH<1.d0).and.(RH>=0.98d0)) then
  kh = 12.74d0-12.94*RH
else

```

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI
INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```

    kh = 1-RH**3
  end if
  V_S = viscoMat%V_S
  ks      = 1.d0
  alpha1  = 1.d0
  alpha2  = 1.d0
  tau_sh  = 0.085d0*(tc**(-0.08d0))*(fcm**(-0.25))*(2*ks*V_S)**(2)
  e_sh_inf = e_s_inf*1.0805/dsqrt((tc+tau_sh)/(4.d0+0.85d0*(tc+tau_sh)))
  q5      = (0.757d0/fcm)*abs(e_sh_inf*100000.d0)**(-0.6d0)
  S0      = tanh(dsqrt(( t0-tc)/tau_sh))
  S       = tanh(dsqrt((time-tc)/tau_sh))
  e_sh    = -e_sh_inf*kh*S
  H0      = 1.d0-(1.d0-RH)*S0
  H       = 1.d0-(1.d0-RH)*S
  Cd      = q5*dsqrt(exp(-8.d0*H)-exp(-8.d0*H0))
  J       = q1 + C0 +Cd

  youngModelB3 = 1.d0/J

  end if
  return
end function youngModelB3

```

Box 4 Modello B3

```

real*8 function frpJm(frpCreepMat, time, timeLoad)
implicit none
type(tFrpCreep)          :: frpCreepMat
real*8                   :: time
real*8                   :: timeLoad
real*8, dimension(nCoeff) :: cm

```

```

real*8                                :: tp
tp = timeLoad
      cm = frpCreepMat%cm
      if (tp>time) tp=time
      frpJm = (cm(1)+cm(2)*(time-tp)) +      &
              cm(3)*(1-exp((tp-time)*cm(4)/cm(3)))

return
end function frpJm
!-----

real*8 function frpJf(frpCreepMat, time, timeLoad)
implicit none
type(tFrpCreep)      :: frpCreepMat
real*8                :: time
real*8                :: timeLoad
real*8, dimension(nCoeff)  :: cf
real*8                :: tp
tp = timeLoad
      cf = frpCreepMat%cf
      if (tp>time) tp=time
      frpJf = (cf(1)+cf(2)*(time-tp)) +      &
              cf(3)*(1-exp((tp-time)*cf(4)/cf(3)))

return
end function frpJf
!-----

!total compliance function
real*8 function frpJ(unit, frpCreepMat, time, timeLoad)
implicit none
integer            :: unit
type(tFrpCreep)  :: frpCreepMat
real*8            :: time
real*8            :: timeLoadI
real*8            :: Jm

```

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```
real*8      :: Jf
real*8      :: Vm
real*8      :: Vf
real*8      :: Vtot
Vm           = frpCreepMat%Vol_m
Vf           = frpCreepMat%Vol_f
if ((Vm+Vf).ne.1.d0)then
    Vtot = Vm+Vf
    Vm = Vm/Vtot
    Vf = Vf/Vtot
    write(* , 900) Vm, Vf
    if (unit.ne.0) write(unit, 900) Vm, Vf
    Vm = frpCreepMat%Vol_m
    Vf = frpCreepMat%Vol_f
end if
Jm = frpJm(frpCreepMat, time, timeLoad)
Jf = frpJf(frpCreepMat, time, timeLoad)
frpJ = Vm*Jm + Vf*Jf
if (unit.ne.0) then
    write(unit,999)time, timeLoad, Jm, Jf, frpJ
end if
return
900 format('WARNING: the % of FRP volume are incorrect. The new % are:', &
    'Vm%= ',F10.5,';',T1,'Vf%= ',F10.5,':')
980 format(11x,'time',7x,'timeLoad',13x,'Jm',13x,'Jf',12x,'Jmf')
999 format(10e15.7)
end function frpJ
```

Box 5 Definizione della funzione di creep per il modello micromeccanico

4 TEORIA DEL CONTATTO

4.1 Introduzione

Nel metodo degli elementi finiti il contatto numerico è la procedura che permette di simulare l'interazione tra due o più corpi inizialmente separati, ma che durante il processo evolutivo del problema studiato possono toccarsi (Wriggers, 2006; Belytschko T. & Liu W. K., 2001). Se si considera un esempio nel campo della meccanica, due corpi distinti al tempo t_0 , spinti l'uno contro l'altro, e avvenuto il contatto al tempo t , inizieranno a trasmettersi le forze di azione e reazione (v. Fig. 27). In modo analogo, se si considera un problema termico, la conduzione di calore tra corpi distinti potrà avvenire solo se essi entreranno in contatto. La trasmissione di calore avverrà nella zona di contatto, definita per ogni coppia di corpi (m,s) da due superfici, chiamate *superfici di contatto*, una appartenente al corpo m e l'altra al corpo s .

La zona che comprende le superfici di contatto è chiamata *zona di interfaccia* o *zona di contatto*.

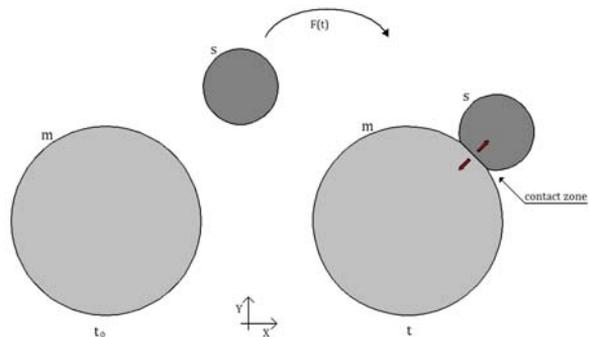


Fig. 27 Condizione di contatto al tempo t

Quando i corpi si toccano e nasce una zona di contatto, si verifica la condizione di *contatto chiuso*.

Nel problema indagato in questo lavoro l'algoritmo del contatto è impiegato per simulare la connessione dei componenti del composito calcestruzzo – FRP a polimerizzazione avvenuta; ciò significa che i componenti sono solidalmente connessi tra loro grazie alla matrice polimerica.

Numericamente il contatto definisce il collegamento tra i componenti e quindi la condizione di contatto chiuso risulta già presente ad inizio

analisi, diversamente dagli esempi visti in precedenza in cui per semplicità il contatto veniva definito a partire da corpi distinti. La teoria alla base del metodo risulta essere la stessa sia per corpi inizialmente separati sia per corpi connessi fin da principio.

Con opportune modifiche, questa tipologia di algoritmo è in grado, ancora, di rappresentare il distacco dei corpi inizialmente a contatto. Ciò ha permesso di simulare il fenomeno della delaminazione di interfaccia tra FRP e calcestruzzo. La definizione delle superfici di contatto, nella zona di collegamento tra i due componenti (calcestruzzo ed FRP) permette di ottenere i campi tensionali e deformativi presenti nell'interfaccia, grandezze necessarie per la progettazione del composito, benché attualmente in fase di studio da parte di diversi autori (Salomoni & Mazzucco, 2011, 5-29; Marfia & Sacco, 2010, 13-20), al fine di valutare il processo di rottura del collegamento.

4.2 Definizione del contatto nel caso di sistemi a un grado di libertà

Si consideri un corpo di massa m collegato con una molla di rigidezza k ad un supporto fisso e posto ad un'altezza iniziale h dal suolo come indicato in Fig. 28

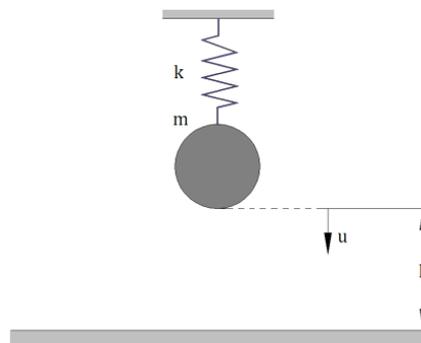


Fig. 28 Schema 1D

Considerando al tempo t_0 la massa soggetta all'accelerazione verticale dovuta alla gravità (g), e la molla scarica, quando essa sarà libera di muoversi per $t > t_0$ passerà dalla configurazione iniziale di Fig. 28 ad una configurazione finale, in cui la massa si sarà abbassata di una quantità u , fino al raggiungimento del minimo di energia potenziale Π :

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}ku^2 - (mg)u \quad (4.1)$$

minimo definito dalla condizione necessaria:

$$\partial\Pi = ku\partial u - mg\partial u = 0 \quad (4.2)$$

Essendo la derivata seconda sicuramente positiva in quanto $\partial^2\Pi=k$, l'equazione (4.2) è l'equazione di minimo e una volta risolta verrà determinato lo spostamento u della massa m . La presenza del supporto ipotizzato, infinitamente rigido e posto ad un'altezza h dalla massa al tempo t_0 , vincola il problema come definito dalla condizione aggiuntiva:

$$c(u) = h - u \geq 0 \quad (4.3)$$

che implica l'impossibilità del verificarsi di compenetrazioni. Questa condizione di vincolo definita da una disuguaglianza viene chiamata funzione di gap (*gap function*) ed è indicata con la lettera c (Wriggers,

2006). Possiamo notare che nel caso in cui $c(u)=0$ la massa tocca il suolo e si verifica la condizione di gap chiuso o contatto chiuso.

Nel caso in cui la soluzione dell'equazione (4.2) dia luogo ad uno spostamento $u > h$ la condizione di vincolo viene a imporre il limite $u = h$, il che comporta che la condizione di minimo Π_{\min} non possa essere raggiunta, mentre si raggiunge la condizione di minimo ammissibile Π_{\min}^c . Il valore raggiunto dall'energia corrisponde a quello ottenuto dalla (4.1) sostituendo ad u il valore massimo ottenibile cioè h .

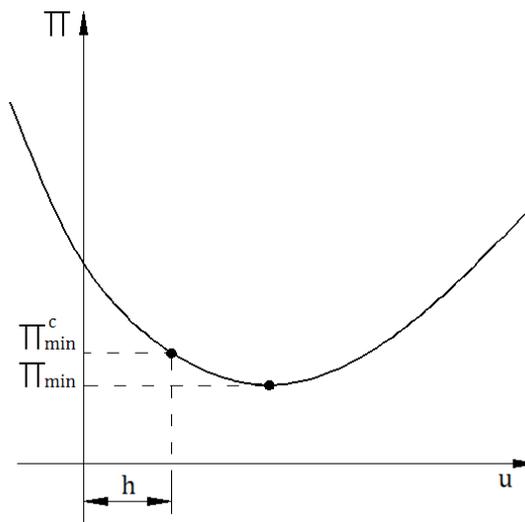


Fig. 29 Energia potenziale

Si consideri infatti (Fig. 29) l'andamento dell'energia potenziale al variare dello spostamento u . Il minimo di energia potenziale è connesso a valori di $u > h$ e quindi non ammessi dalla condizione di vincolo di contatto che impone come spostamento massimo $u = h$.

Ottenuta la condizione di gap chiuso, la massa trasferisce al suolo una forza e ne riceverà, per il principio di azione e reazione, una uguale e contraria.

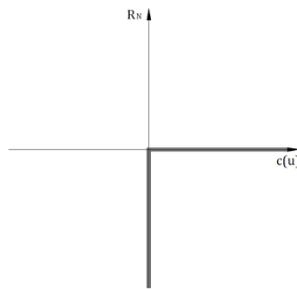


Fig. 30 Forza di reazione vs. gap da sforzo normale

Nel caso più semplice, il contatto si verifica nel caso in cui questo si attiva per pura compressione dei corpi; in questo caso la forza di reazione può essere solo ≤ 0 come mostrato in Fig. 30. La condizione sulle forze risulta quindi:

$$\begin{cases} R_N = 0 ; c(u) > 0 ; u < h \\ R_N < 0 ; c(u) = 0 ; u = h \end{cases} \quad (4.4)$$

Da quanto visto sopra possiamo definire il contatto attraverso tre condizioni fondamentali: la prima associata agli spostamenti, la seconda alle forze e una terza condizione che combina le prime due (come anche indicato dalla (4.5))

$$c(u) \geq 0 ; R_N \leq 0 ; R_N c(u) = 0 \quad (4.5)$$

Le prime due equazioni sono note come condizioni di Hertz-Signorini-Moreau nella meccanica del contatto, e corrispondono rispettivamente alla condizione di impenetrabilità e a quella di azione e reazione, mentre la terza condizione è chiamata *condizione di complementarità* di Kuhn-Tucker, nella teoria dell'ottimizzazione (Wriggers, 2006).

4.3 Metodo Penalty in problemi monodimensionali

Utilizzando il metodo agli elementi finiti, la soluzione del problema studiato si ottiene per via approssimata; lo scostamento della soluzione così ottenuta da quella reale dipende da molteplici fattori quali ad esempio: il numero di nodi e di elementi con cui si è discretizzato il problema, le tolleranze di convergenza degli algoritmi risolutivi. Nella meccanica del contatto è possibile modificare la condizione di impenetrabilità, cercando una soluzione approssimata, che ammetta una leggera compenetrazione dei corpi che dovrà comunque essere tenuta al disotto di una certa tolleranza.

Per descrivere in linea generale questo metodo risolutivo possiamo considerare lo stesso esempio riportato nel paragrafo precedente, cioè il caso di una massa collegata ad una molla, libera di spostarsi per effetto gravitazionale. Nell'istante di tempo in cui si verifica il contatto col suolo, il metodo penalty consente una rappresentazione del tipo indicato in in Fig. 31:

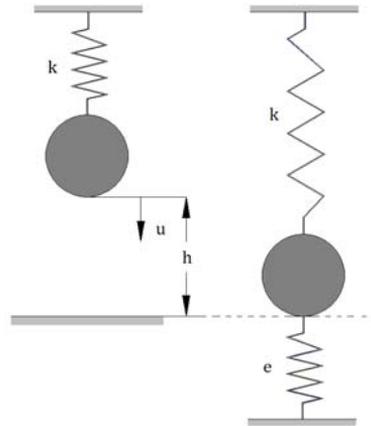


Fig. 31 Metodo Penalty

Al suolo viene quindi assegnata una rigidità e , chiamata coefficiente penalty o di penalizzazione (Wriggers, 2006).

L'equazione dell'energia si modifica e diventa:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2}ku^2 - (mg)u + \frac{1}{2}e[c(u)]^2 \quad (4.6)$$

Con $e > 0$.

La determinazione del minimo di energia avviene sempre derivando l'equazione del potenziale e ponendola uguale a zero. Così procedendo si ottiene:

$$\partial\Pi = ku\partial u - mg\partial u - ec(u)\partial u = 0 \quad (4.7)$$

Lo spostamento u è definito come:

$$u = \frac{mg + eh}{k + e} \quad (4.8)$$

Quindi la funzione di gap $c(u)$ assume la forma seguente:

$$c(u) = h - u = h - \frac{mg + eh}{k + e} = \frac{kh - mg}{k + e} \quad (4.9)$$

La (4.9) corrisponde alla funzione di gap nella configurazione di contatto chiuso; infatti facendo tendere e ad ∞ , $c(u) = 0$ ottenendo la condizione di contatto chiuso nel caso di suolo infinitamente rigido.

Nel caso in cui $kh < mg$ la funzione di gap risulta negativa, il che coincide con la condizione in cui la massa m penetra all'interno del suolo e la penetrazione dei due corpi sarà quindi dipendente dal coefficiente di penalty, cioè all'aumentare di e la penetrazione si riduce.

4.4 Contatto Normale tridimensionale

Consideriamo due corpi B^1 e B^2 in uno spazio tridimensionale, a contatto fra loro.

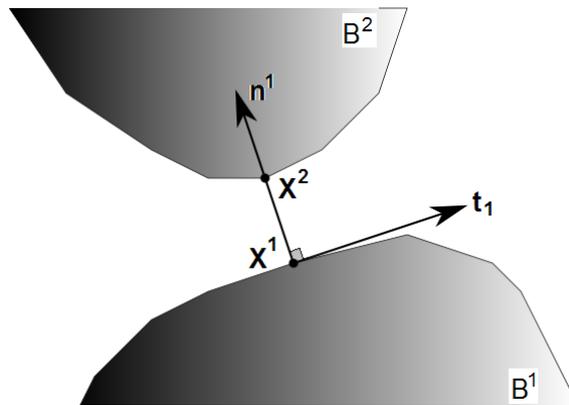


Fig. 32 Individuazione della coppia di contatto nel caso di sistemi 2D

Nella zona di contatto la condizione di non compenetrazione impone che:

$$(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \cdot \mathbf{n}^1 \geq 0 \quad (4.10)$$

dove il termine \mathbf{x}^i è il vettore posizione al tempo corrente (con $i=1,2$). Se consideriamo la configurazione iniziale \mathbf{X}^i il vettore \mathbf{x}^i viene determinato dalla somma vettoriale $\mathbf{x}^i = \mathbf{X}^i + \mathbf{u}^i$ dove \mathbf{u}^i è il vettore spostamento del punto i . Nell'equazione (4.10) è stata indicata con \mathbf{n}^1 la normale al punto \mathbf{x}^1 che passa per il punto \mathbf{x}^2 , coincidente con la condizione di minima distanza. Questa coppia di punti ($\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$) è denominata coppia di contatto, e permette di definire le condizioni di contatto tra i corpi.

Nell'applicazione pratica degli elementi finiti, le due superfici di contatto appartenenti ai corpi che si toccano sono chiamate superfici "*master*" e "*slave*" e i punti che le caratterizzano sono i *punti master* e i *punti slave*. Ogni coppia individuata per stabilire la condizione di contatto, è quindi sempre definita mediante un punto master e un punto slave.

In un mezzo continuo, le coppie di contatto potrebbero essere infinite (Fig. 33 a); ciò ad esempio accade nel caso di due superfici piane che scorrono tra loro. Mentre la coppia è unica nel caso di due sfere infinitamente rigide che si toccano (Fig. 33 b).

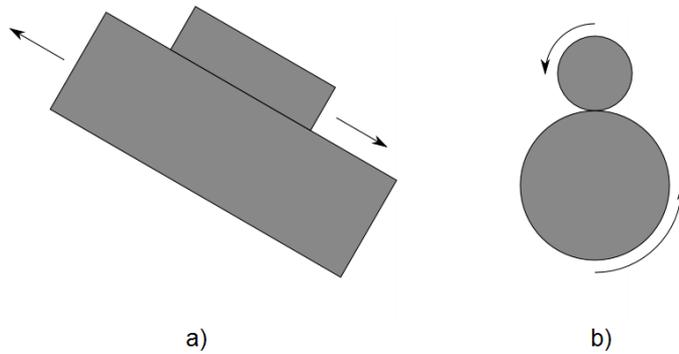


Fig. 33 a) Superfici Piane in contatto; b) Contatto tra due sfere

Nel metodo degli elementi finiti, considerando il continuo in forma discreta, le coppie di contatto che possono essere individuate, sono sempre in numero intero finito, variabile con la dimensione della discretizzazione.

Se si considera il sistema di riferimento (s.d.r.) locale (ξ_1, ξ_2) associato alla superficie di contatto Γ^1 , il punto \mathbf{x}^1 può essere rappresentato mediante tale s.d.r.: $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^1(\xi_1, \xi_2)$ in quanto appartenente alla superficie $\mathbf{x}^1 \in \Gamma^1$. Il problema di minima distanza del punto \mathbf{x}^2 dalla superficie Γ^1 è quindi definito attraverso l'equazione:

$$d(\xi_1, \xi_2) = \left| \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 \right| = \min(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1(\xi_1, \xi_2)) \quad (4.11)$$

Si tratta di risolvere un problema di minimo andando a definire la derivata prima della distanza d , e imponendola uguale a zero:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} d(\xi_1, \xi_2) = \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1(\xi_1, \xi_2)}{|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1|} \frac{\partial \mathbf{x}^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi^i} = 0 \quad (4.12)$$

La soluzione del sistema (4.12) definisce il vettore normale alla superficie Γ^1 passante per \mathbf{x}^2 .

La determinazione del vettore normale \mathbf{n}^1 può essere effettuata andando ancora a costruire i vettori tangenti alla superficie, \mathbf{t}^1 , \mathbf{t}^2 , nel punto, ottenendo poi \mathbf{n}^1 attraverso il prodotto vettore:

$$\mathbf{n}^1 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 \quad (4.13)$$

Definite le coppie di contatto $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ sui corpi in esame, si è stabilita la zona in cui il contatto è avvenuto (*zona di contatto*). Tale zona fissa la posizione in cui i corpi interagiscono attraverso il principio di azione e reazione e dove sarà possibile stabilire, attraverso la definizione di una legge costitutiva, il campo tensionale e deformativo all'interfaccia.

4.5 Legge costitutiva di Interfaccia

In letteratura esistono varie tipologie di elementi di contatto, e vari modi per rappresentarne il comportamento (Wriggers, 2006; Belytschko T. & Liu W. K., 2001; Popov, 2010). In generale nel contatto “classico” l’interazione tra i corpi avviene per compressione normale o con attrito, definendo leggi forza – spostamento per descriverne il processo.

Nel caso in cui si voglia rappresentare attraverso l’algoritmo del contatto il comportamento di interfaccia tra due o più componenti connessi attraverso uno strato legante (l’esempio esaminato riguarda appunto il collegamento tra una trave in calcestruzzo legata a fogli di FRP mediante resine epossidiche), è possibile definire sia il tensore di deformazione sia quello degli stress, noti gli spostamenti dei punti che caratterizzano la coppia di contatto. Questo permette di definire anche opportune leggi costitutive per la rappresentazione del collegamento dei componenti.

Volendo peraltro descrivere in modo completo l’aderenza calcestruzzo-FRP, è indispensabile includere il contributo specifico dell’adesivo nell’algoritmo di contatto; a tal fine si è innanzitutto provveduto a modificare la condizione di chiusura del contatto, rispetto la formulazione classica; indicato con t_a lo spessore dell’adesivo, questo risulta definito dalla condizione iniziale della funzione di gap: $g = t_a$, dove per t_a si intende lo spessore dell’adesivo o come vedremo più avanti delle asperità di interfaccia.

Per la determinazione completa dello stato tensionale all'interfaccia, è stata quindi definita un'area di influenza di lati Δx , Δy (Fig. 34) per ogni nodo slave, attraverso la griglia che ne definisce la superficie; corrispondentemente, ottenuta la coppia di contatto, è stato generato un volume prismatico di adesivo di riferimento di spigoli Δx , Δy , t_a (Fig. 35).

La determinazione delle componenti di spostamento incognite è quindi raggiunta attraverso la risoluzione dell'usuale sistema linearizzato $\mathbf{Ku} = \mathbf{F}$. La matrice di rigidezza assemblata \mathbf{K} dipende dai contributi di rigidezza, sia di ogni elemento costituente la discretizzazione, sia delle coppie di contatto attraverso il legame costitutivo associato all'interfaccia. E' stato quindi scelto il *metodo penalty* per il controllo del contatto, visto che la sua applicazione corrisponde sostanzialmente a considerare l'interposizione di molle di interfaccia; nella innovativa trattazione della zona di interfaccia qui proposta, il metodo penalty ha avuto il ruolo di associare ai due punti che compongono la coppia di contatto una relazione dipendente dal legame costitutivo dell'interfaccia stessa: come infatti già anticipato, la zona di interfaccia è stata numericamente riprodotta come se si trattasse di un continuo tridimensionale.

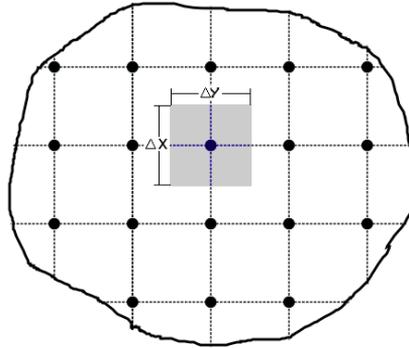


Fig. 34 Area di influenza riferita ad un nodo slave

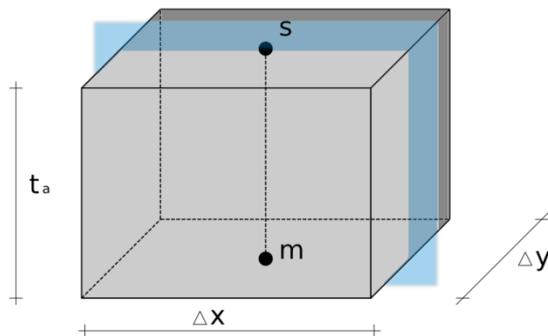


Fig. 35 Volume di adesivo individuato dalla coppia di contatto

La risoluzione del sistema di equazioni di cui sopra ha dunque condotto alla determinazione delle componenti di spostamento (u^s , v^s , w^s , u^m , v^m , w^m); peraltro, l'individuazione delle componenti di spostamento del punto

master per via numerica non è immediata: infatti, essendo esclusivamente il punto slave coincidente con un nodo, il suo vettore spostamento è direttamente determinato attraverso la risoluzione del sistema di equazioni governanti. Per risalire allo spostamento del punto master, invece, è necessario procedere con l'interpolazione dei risultati ottenuti nei nodi appartenenti alla superficie master attraverso l'utilizzo delle funzioni di forma.

Noti così $(u^s, v^s, w^s, u^m, v^m, w^m)$, si è poi mantenuta l'ipotesi già considerata in (Smith & Teng, 2001, 857-871) secondo cui lo spostamento varia linearmente nello spessore di adesivo, sicché (Fig. 36)

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\Delta x}(u^s - u^m); \quad \frac{dv}{dy} = \frac{1}{\Delta y}(v^s - v^m); \quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{t_a}(w^s - w^m) \quad (4.14)$$

e analogamente lungo le altre direzioni.

Attraverso il presente approccio è risultato dunque possibile rappresentare *virtualmente* l'adesivo attraverso una modifica all'algoritmo di contatto e quindi caratterizzare dal punto di vista meccanico l'interfaccia; conseguentemente, avendone determinato lo stato di deformazione attraverso le relazioni sopra riportate, si è potuto determinare lo stato di tensione

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^C : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.15)$$

essendo \mathbf{D}^C il tensore costitutivo relativo al materiale adesivo.

In prima approssimazione è stato scelto di utilizzare un tensore costitutivo di tipo ortotropo, con un coefficiente di Poisson pari a 0 in modo da ottenere un tensore costitutivo di interfaccia diagonale supponendo che gli effetti di contrazione laterale per questa tipologia di problemi fossero trascurabili. Considerato un sistema di riferimento principale di tensione/deformazione, si ha quindi

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^C & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}^C & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

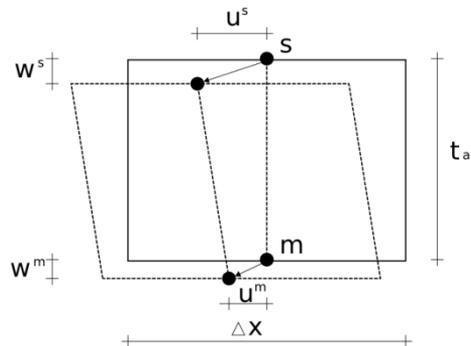


Fig. 36 Componenti di spostamento nello strato adesivo

4.6 Modello Numerico

Dal punto di vista numerico, ogni superficie in cui il contatto è possibile viene definita attraverso le facce degli elementi finiti, e quindi dai corrispondenti nodi della discretizzazione; ad esempio, nel caso di elementi brick (a 20 nodi) la definizione di queste superfici è illustrata in Fig. 37 supponendo di conoscere preventivamente dove un contatto fra elementi è possibile; in caso contrario qualsiasi faccia del singolo elemento finito può dare potenzialmente luogo ad una superficie di contatto.

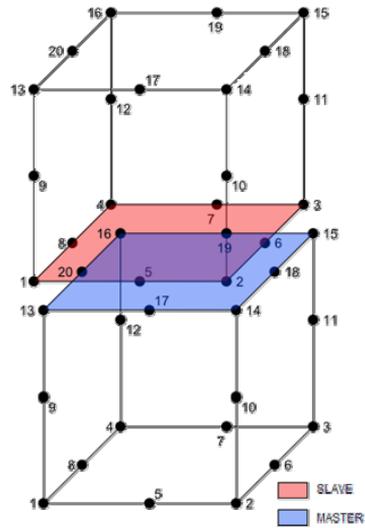


Fig. 37 Superfici Master e Slave associate alle facce degli elementi della discretizzazione

Le superfici in cui il contatto è possibile devono quindi essere definite in fase di input. Viene così individuata una superficie master nel corpo B^m e una superficie slave nel corpo B^s . In generale le superfici master e slave possono essere intercambiabili in quanto hanno di norma un significato convenzionale per stabilire come avverrà la determinazione delle grandezze necessarie alla risoluzione del problema.

La faccia dell'elemento a cui sono associate le condizioni di contatto sono anche chiamate "*elementi di contatto master*" nel caso la faccia appartenga alla superficie master o "*elementi di contatto slave*" ne caso la faccia appartenga alla superficie slave.

È stato considerato un contatto di tipo “*node to surface*” che consiste nel cercare i punti di contatto nelle superfici master e slave attraverso la procedura di seguito riassunta:

Il contatto viene realizzato mediante l'individuazione di due punti definiti “*coppia di contatto*”, uno appartenente alla superficie master e uno alla superficie slave con la regola della minima distanza. Se la distanza trovata risulta minore o uguale ad un certo valore stabilito si realizza il contatto (condizione di contatto chiuso).

La convenzione è quella in cui nella superficie slave vengono individuati i **nodi** in cui può avvenire il contatto, mentre nella superficie master sono definiti i **punti** di minima distanza con i nodi slave chiamati punti master. I punti master sono punti generici della superficie master e non necessariamente i nodi che la definiscono.

4.6.1 *Determinazione della coppia di contatto*

Consideriamo un generico punto P appartenente alla superficie di contatto Γ^m . Possiamo definire il punto mediante un s.d.r. globale, (che viene assunto cartesiano ortogonale) ottenendo quindi $P=P(x,y,z)$. Il punto P

appartenendo alla superficie master può essere descritto anche mediante il s.d.r. locale della superficie stessa.

Si consideri un s.d.r. applicato ad una superficie, esso può essere descritto mediante due variabili curvilinee (ξ_1, ξ_2) , ottenendo che ogni punto appartenente alla superficie può essere individuato attraverso tale sistema. Il punto P può quindi essere scritto come $P = P(\xi_1, \xi_2)$.

E' ancora possibile rappresentare le coordinate curvilinee in forma vettoriale: $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, ottenendo quindi la forma più compatta $P = P(\xi)$.

Come detto precedentemente le superfici di contatto sono associate alle facce degli elementi che definiscono la discretizzazione.

Nell'algoritmo sviluppato, sono stati utilizzati elementi brick a 20 nodi per la rappresentazione del corpo tridimensionale. Le superfici rappresentabili da questo elemento e coincidenti con le facce dell'elemento stesso sono individuate da 8 nodi disposti sui bordi della faccia (v. Fig. 37) a cui possono essere associate funzioni di forma di secondo grado (grazie al fatto che sui bordi dell'elemento sono presenti tre nodi).

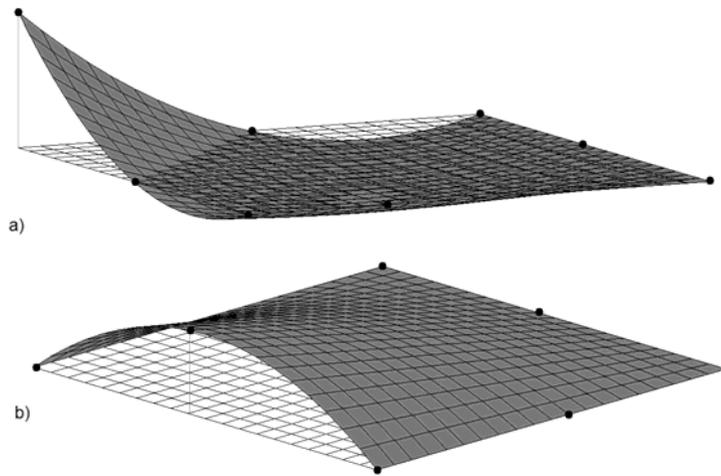


Fig. 38 a) f.d.f. nei nodi di spigolo; b) f.d.f. nei nodi interni del bordo

Il s.d.r. locale della superficie è rappresentato da un s.d.r. curvilineo associato alla faccia i cui punti potranno essere rappresentati da opportune funzioni di forma passanti per i nodi Fig. 38. Nel caso di superfici a 8 nodi saranno impiegate f.d.f. quadratiche (v. Box 6), che rappresentano quindi le funzioni di trasformazione tra il s.d.r. globale e quello locale. In generale se si considerano n f.d.f. per ogni elemento di superficie,

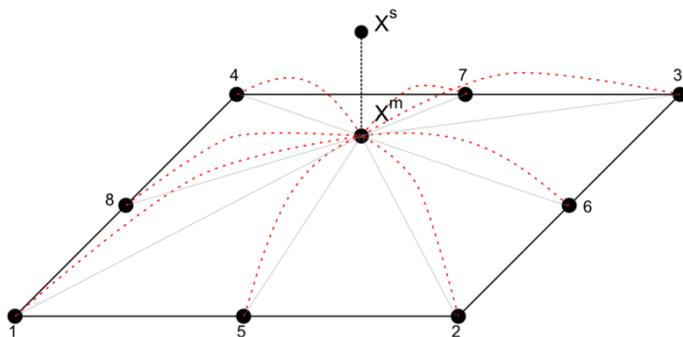


Fig. 39 Coppia di contatto in cui il punto master viene definito attraverso le funzioni di forma N_i associate ai nodi della superficie

(nel caso specifico essendo l'elemento realizzato con 8 nodi saranno presenti 8 f.d.f. e quindi $n=8$ v. Fig. 39), dette (x,y,z) le coordinate del punto P, le equazioni di trasformazione dei due s.d.r. risultano:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi_1, \xi_2) x_i \\
 y &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi_1, \xi_2) y_i \\
 z &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi_1, \xi_2) z_i
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

dove x_i, y_i, z_i sono le coordinate del nodo i -esimo, rispetto al s.d.r. globale.

Il primo step per la determinazione della coppia di contatto è quello di individuare il punto di minima distanza. Questo comporta la determinazione della normale alla superficie dell'elemento, operazione che può avvenire andando prima a localizzare i vettori tangenti in un punto alla superficie, come descritto attraverso le (4.17).

Considerando il s.d.r. locale dell'elemento, le tangenti sono ricavate attraverso la derivazione delle f.d.f.. Nel caso di f.d.f. quadratiche i vettori tangenti risultano variabili in ogni punto dell'elemento):

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \frac{\partial \mathbf{x}^m}{\partial \xi_1} = \left[\frac{\partial x_1^m}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_2^m}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_3^m}{\partial \xi_1} \right] \\ \mathbf{t}_2 &= \frac{\partial \mathbf{x}^m}{\partial \xi_2} = \left[\frac{\partial x_1^m}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_2^m}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_3^m}{\partial \xi_2} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

“NOTA: nel caso fossero stati impiegati elementi brick ad 8 nodi, ogni faccia, e quindi l'elemento di contatto, sarebbe stato determinato attraverso 4 nodi e f.d.f. lineari. Questo avrebbe comportato vettori tangenti definiti in modo univoco in ogni punto dell'elemento di contatto.”

Essendo \mathbf{x}^m definito dalle (4.17) è possibile esplicitare una componente del vettore tangente \mathbf{t}_k (con $k=1,2$) grazie alle (4.18) come:

$$\frac{\partial x_j^m}{\partial \xi_k} = \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[\sum_{i=1}^n N_i(\xi) x_j^i \right] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_k} x_j^i + \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \frac{\partial x_j^i}{\partial \xi_k} \quad (4.19)$$

Ma x_j^i è la componente j-esima del nodo i, che nel s.d.r. locale non cambia (nel metodo agli elementi finiti il s.d.r. locale può essere associato ad un elemento “unitario” le cui coordinate nodali sono note (Zienkiewicz & Taylor, 2000), e normalmente assumono valore $-1 \leq x_j^i \leq 1$, Fig. 40).

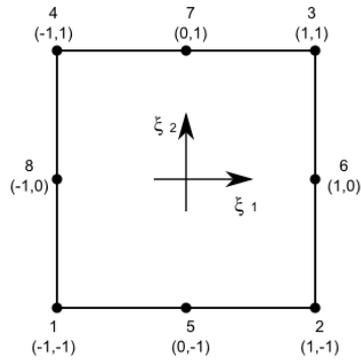


Fig. 40 Elemento unitario

La (4.19) risulta quindi:

$$\frac{\partial x_j^m}{\partial \xi_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi_k} x_j^i \quad (4.20)$$

Definite le componenti dei vettori tangenti, la normale si trova attraverso il prodotto vettore:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2}{\|\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2\|} \quad (4.21)$$

Con le (4.18) e la (4.21) si fissa il fascio di normali appartenenti all'elemento di contatto corrente.

Ora, per soddisfare la condizione di minima distanza tra il nodo slave e la superficie master, si dovrà trovare quella normale alla superficie la cui retta parallela passi per \mathbf{x}^s come illustrato in Fig. 41.

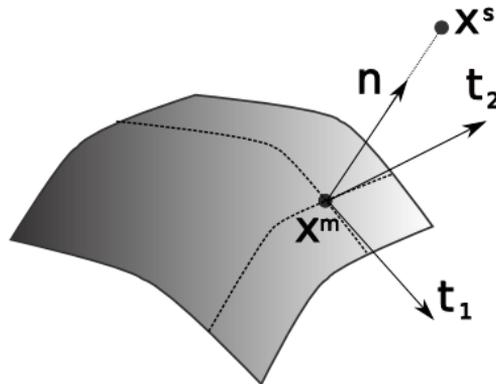


Fig. 41 Definizione della normale n attraverso i vettori tangenti t_1 , t_2 alla superficie master.

L'equazione di una retta passante per due punti nello spazio, parallela alla normale n , è data dall'equazione:

$$\frac{x_1^s - x_1^m(\xi)}{n_1} = \frac{x_2^s - x_2^m(\xi)}{n_2} = \frac{x_3^s - x_3^m(\xi)}{n_3} \quad (4.22)$$

Le incognite della (4.22) sono le componenti delle coordinate locali (ξ_1, ξ_2) che possono essere ricavate risolvendo il sistema non lineare $F(\xi)$ ottenuto dalla (4.22):

$$F(\xi) \begin{cases} (x_1^s - x_1^m)n_2 - (x_2^s - x_2^m)n_1 = 0 & f_1(\xi) = 0 \\ (x_1^s - x_1^m)n_3 - (x_3^s - x_3^m)n_1 = 0 & f_2(\xi) = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

La risoluzione di $F(\xi)$ può essere condotta utilizzando lo schema iterativo di *Newton-Raphson*.

Lo schema risolutivo, considerando l'iterazione m -esima risulta:

$$\xi^{m+1} = \xi^m - \left[F'(\xi^m)^{-1} F(\xi^m) \right] \quad (4.24)$$

La dimostrazione generale per ottenere la (4.24) è riportata nel Box 7.

Il termine $F'(\xi)$, derivata prima di ciascuna equazione del sistema $F(\xi)$, rispetto a tutte le direzioni, nel caso in esame risulta essere:

$$F'(\xi) \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial x_1^m}{\partial \xi_k} n_2 + (x_1^s - x_1^m) \frac{\partial n_2}{\partial \xi_k} + \frac{\partial x_2^m}{\partial \xi_k} n_1 - (x_2^s - x_2^m) \frac{\partial n_1}{\partial \xi_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial x_1^m}{\partial \xi_k} n_3 + (x_1^s - x_1^m) \frac{\partial n_3}{\partial \xi_k} + \frac{\partial x_3^m}{\partial \xi_k} n_1 - (x_3^s - x_3^m) \frac{\partial n_1}{\partial \xi_k} \end{cases} \quad (4.25)$$

in cui il pedice (k) può assumere i valori 1,2.

Risolvendo il sistema (4.25) viene definita la coppia (ξ_1, ξ_2) che permette di determinare il punto di minima distanza.

Aver definito il punto di minima distanza non significa necessariamente aver determinato la coppia di contatto, e ciò per due motivi:

- 1- Non è detto che il punto di minima distanza ricada all'interno dell'elemento master considerato; infatti se la soluzione (ξ_1, ξ_2) non rispetta i limiti dell'elemento unitario $-1 \leq \xi_i \leq 1$, il punto di minimo non appartiene all'elemento e quindi dovrà essere scartato.
- 2- Per ogni nodo slave in generale la ricerca del punto di minima distanza andrà eseguita su ogni elemento di contatto appartenente alla superficie master. Potrebbe quindi succedere che 2 o più elementi vicini soddisfino la condizione "1" e quindi definiscano al loro interno un punto di minimo rispetto al nodo slave corrente. In questo caso dovrà essere preso come punto

master della coppia il punto che darà la distanza minima assoluta tra i minimi relativi trovati.

- 3- Si dovrà ancora gestire il caso in cui esistano due o più punti master di minimo con la medesima distanza. Questo caso si verifica ad esempio quando il punto di minimo corrisponde al bordo comune di due o più elementi master.

La procedura di ricerca della coppia di contatto descritta in questo paragrafo risulta essere computazionalmente molto onerosa. Esistono però algoritmi di ottimizzazione denominati “*contact search*” di cui uno verrà descritto più avanti. Tali algoritmi hanno il compito di ridurre la procedura di ricerca, che si andrà quindi a eseguire solo su specifici elementi master e non su tutta la superficie master, portando a una drastica diminuzione dei tempi di definizione della coppia.

Stabilita una coppia di contatto, la distanza tra il nodo slave ed il punto master coincide con il valore della funzione di gap.

Come detto precedentemente l'elemento di contatto impiegato è un elemento di superficie legato alla faccia degli elementi brick a 20 nodi, quindi è individuato degli 8 nodi di bordo. È quindi possibile definirne le caratteristiche geometriche attraverso le classiche procedure impiegate per gli elementi shell (Fish & Belytschko, 2008; Zienkiewicz & Taylor, 2000)

In *Fig. 42* si indica la numerazione locale dell'elemento

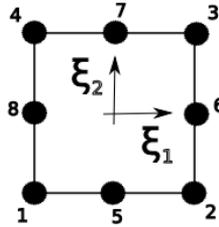


Fig. 42 Incidenza dell'elemento di contatto

nonché la disposizione dei s.d.r. locale.

Le coordinate nodali dell'elemento unitario sono riportate in Tab. 5:

	Node 1	Node 2	Node 3	Node 4	Node 5	Node 6	Node 7	Node 8
ξ_1	-1.0	1.0	1.0	-1.0	0.0	1.0	0.0	-1.0
ξ_2	-1.0	-1.0	1.0	1.0	-1.0	0.0	1.0	0.0

Tab. 5 Coordinate nodali dell'elemento unitario

Le funzioni di forma nei nodi di bordo (nodo $i = 1, 2, 3, 4$) sono definite dalla seguente equazione:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_1 \xi_1^i) (1 + \xi_2 \xi_2^i) (\xi_1 \xi_1^i + \xi_2 \xi_2^i - 1) \quad (4.26)$$

Le cui derivate risultano essere:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{dN_i}{d\xi_1} &= \frac{1}{4} \xi_1^i (1 + \xi_2 \xi_2^i) (2\xi_1 \xi_1^i + \xi_2 \xi_2^i) \\
 \frac{dN_i}{d\xi_2} &= \frac{1}{4} \xi_2^i (1 + \xi_1 \xi_1^i) (\xi_1 \xi_1^i + 2\xi_2 \xi_2^i) \\
 \frac{d^2 N_i}{d\xi_1^2} &= \frac{1}{2} (1 + \xi_2 \xi_2^i) \\
 \frac{d^2 N_i}{d\xi_2^2} &= \frac{1}{2} (1 + \xi_1 \xi_1^i) \\
 \frac{d^2 N_i}{d\xi_1 d\xi_2} &= \frac{d^2 N_i}{d\xi_2 d\xi_1} = \frac{1}{2} (\xi_1 \xi_1^i + \xi_2 \xi_2^i + 0.5)
 \end{aligned} \right. \quad (4.27)$$

con $\xi_1^i = \xi_2^i = \pm 1.0$

Le funzioni di forma dei nodi intermedi con $\xi_1^i = 0$:

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi_1^2) (1 + \xi_2 \xi_2^i) \quad (4.28)$$

Le cui derivate sono:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} = -\xi(1 + \xi_2 \xi_2^i) \\
 \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} = \frac{1}{2} \xi_2^i (1 - \xi_1^2) \\
 \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_1^2} = -(1 + \xi_2 \xi_2^i) \\
 \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_1^2} = 0 \\
 \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} = -\xi_1 \partial \xi_2^i
 \end{array} \right. \quad (4.29)$$

Mentre le funzioni di forma dei nodi intermedi con $\xi_2^i = 0$ risultano essere:

$$N_i = \frac{1}{2} (1 + \xi_1 \xi_1^i) (1 - \xi_2^2) \quad (4.30)$$

Con le seguenti derivate:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} = \frac{1}{2} \xi_1^i (1 - \xi_2^2) \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} = -\xi_2 (1 + \xi_1 \xi_1^i) \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_1^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_2^2} = -(1 + \xi_1 \xi_1^i) \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} = -\xi_1 \xi_2 \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Il passaggio tra sistema locale riferito all'elemento unitario e quello globale (v. Fig. 43) viene realizzato dalle equazioni (4.17)

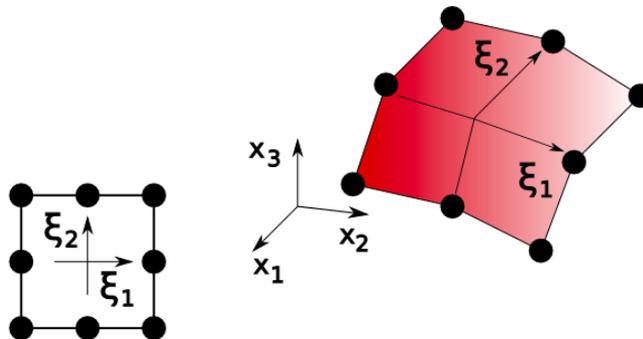


Fig. 43 Passaggio da elemento di contatto unitario a elemento reale

Box 6 Caratteristiche dell'elemento di contatto

La procedura per la risoluzione di un sistema non lineare $F(\xi)=0$ mediante l'algoritmo iterativo di Newton-Raphson parte dalla considerazione che non conoscendo la soluzione esatta ξ è possibile assegnare una soluzione approssimata ξ^m e trovarne la sua correzione $\Delta \xi^m$. Si considera la soluzione approssimata:

$$\xi \approx \xi^{m+1} = \xi^m + \Delta \xi^m \quad (4.32)$$

Dove ξ sono le variabili del sistema rappresentate in forma vettoriale: $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$. La soluzione approssimata deve risultare pari a:

$$F(\xi) \approx F(\xi^{m+1}) = F(\xi^m + \Delta \xi^m) = 0 \quad (4.33)$$

Possiamo quindi sviluppare la funzione in serie di Taylor, troncando alla derivata prima, ottenendo così:

$$\begin{aligned} F(\xi^m + \Delta \xi^m) &= F(\xi^m) - \Delta \xi^m F'(\xi^m) = 0 \\ \Delta \xi^m &= F'(\xi^m)^{-1} F(\xi^m) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Il termine $F'(\xi)$ risulta essere una matrice di funzioni che si dovrà quindi invertire:

$$F'(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_r}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial \xi_r} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

essendo le f_s (con $s=1,2,\dots,r$) le funzioni del sistema.

Si ottiene lo schema iterativo:

$$\xi^{m+1} = \xi^m - \left[F'(\xi^m)^{-1} F(\xi^m) \right] \quad (4.36)$$

che verrà troncato quando $F(\xi^{m+1}) < TOLL$, avendo indicato con TOLL la tolleranza voluta.

Box 7 Schema di Newton-Raphson per sistemi non lineari

4.6.2 Il segno della funzione di gap

La funzione di gap ha il compito di controllare la distanza tra il nodo slave e il punto master che caratterizza la coppia di contatto. Il segno di questa funzione rappresenta la condizione di avere o meno compenetrazione dei corpi in contatto; questa condizione è anche chiamata: “*penetration condition*” (Wriggers, 2006). Se $gap \geq 0$ i corpi in questione non sono compenetrati; se $gap < 0$ i corpi sono compenetrati.

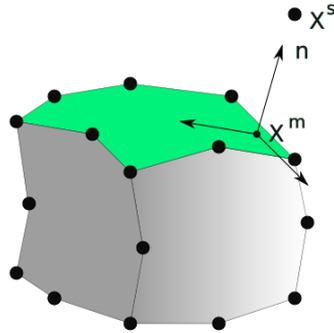


Fig. 44 S.d.r. locale della coppia di contatto

Note le coordinate della coppia di contatto: $(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^m)$ nel s.d.r. globale è possibile ottenere le componenti del vettore $\text{gap} = (\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m)$ rispetto ad un s.d.r. puntato su \mathbf{x}^m e parallelo alla normale \mathbf{n} .

Definita una matrice di rotazione \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi \sin \phi - \cos \vartheta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \vartheta \sin \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \vartheta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \vartheta \sin \phi \sin \psi & -\sin \psi \cos \phi + \cos \vartheta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \phi & \sin \vartheta \cos \phi & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

con ψ , ϕ , ϑ angoli tra il s.d.r. globale e locale, si ottiene il seguente vettore trasformato a partire dal vettore gap :

$$\mathbf{x}^{s*} = \mathbf{R}(\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m) \quad (4.38)$$

ove \mathbf{x}^{s*} rappresentano le coordinate del nodo slave rispetto il s.d.r. indicato in Fig. 44. Si ha quindi $\mathbf{x}^{s*} = [0, 0, \mathbf{x}_3^*]$. Il segno della funzione gap così scritta coincide con il segno di \mathbf{x}^{s*} .

Numericamente gli angoli ψ , ϕ , ϑ possono essere determinati considerando che la normale $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, definita rispetto al s.d.r. globale, ha direzione parallela rispetto ad un asse locale (v. Fig. 44). Quindi le sue componenti coincidono con i coseni degli angoli cercati:

$$\begin{cases} \psi = \text{acos}(n_1) \\ \phi = \text{acos}(n_2) \\ \vartheta = \text{acos}(n_3) \end{cases} \quad (4.39)$$

4.6.3 Ricerca del possibile contatto

E' stato spiegato precedentemente che l'algoritmo per la determinazione delle coppie di contatto risulta essere computazionalmente molto oneroso; è perciò indispensabile cercare di ottimizzare l'algoritmo andando ad effettuare la procedura di ricerca del minimo solo in un numero limitato di elementi master. Questo genere di ottimizzazione è chiamato "contact search". Un'idea molto semplice è quella di fare un controllo preventivo sui nodi master seguendo questa procedura:

1- Si ricerca la distanza tra il nodo slave corrente e tutti i nodi master della superficie corrispondente andando quindi a cercare la distanza minima attraverso l'equazione:

$$\min \left(d^j = \sqrt{(x^s - x^{m,j})^2 + (y^s - y^{m,j})^2 + (z^s - z^{m,j})^2} \right) \quad (4.40)$$

dove è stato indicato con j il nodo master j -esimo, e quindi d^j la distanza tra il nodo slave \mathbf{x}^s corrente, e il j -esimo nodo master $\mathbf{x}^{m,j}$.

2- Definito il nodo appartenente alla superficie master più vicino al nodo slave corrente, che indicheremo con \mathbf{x}_{\min}^m è plausibile pensare che il punto appartenente alla superficie master di minima distanza con il nodo slave corrente si trovi su uno degli elementi che concorrono al nodo master trovato \mathbf{x}_{\min}^m .

4- Individuati tutti gli elementi master che contengono \mathbf{x}_{\min}^m la ricerca della coppia di contatto descritta precedentemente verrà effettuata solo in questi elementi.

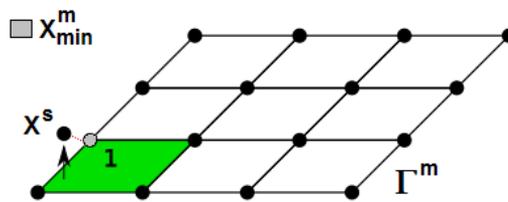


Fig. 45 Contact search

In Fig. 45 si riporta un semplice esempio in cui, se venisse applicata la procedura descritta di “*contact search*”, si andrebbe a definire un unico elemento dove andare a ricercare il punto di minimo.

“ESEMPIO: se considerassimo una discretizzazione con 1000 elementi master disposti in una griglia regolare in cui in un nodo possono

concorrere al più 4 elementi master, Fig. 46, se non si effettuasse la procedura di *contact search* per ogni nodo slave si dovrebbero applicare le procedure di definizione della coppia di contatto su tutti i 1000 elementi.

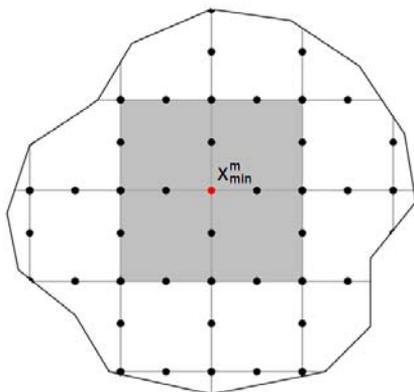


Fig. 46 Contact Search

Applicando invece l'algoritmo di ricerca visto in questo paragrafo la coppia verrà cercata al più su quattro elementi per ogni nodo slave, il che quindi comporta notevoli risparmi di tempo.”

Lo schema del “contact search” impiegato è stato riportato in pseudo codice nel Box 8.

Possiamo scrivere la procedura numerica in pseudo codice nel seguente modo:

minDist = 0.0

do currentMasterNode = 1, totMasterNode

$$dist = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k^s - x_k^m)^2}$$

if (dist < minDist)

minDist = dist

$\mathbf{x}_{\min}^m = \mathbf{x}^m$

end if

end do

Intendendo che \mathbf{x}^m sono le coordinate del nodo master corrente il cui puntatore è currentMasterNode.

Box 8 Algoritmo di Contact Search

4.6.4 Test: definizione della normale ad una superficie

E' stato eseguito un test sull'algoritmo per la valutazione della normale alla superficie master. Essa è stata definita con un unico elemento di 8 nodi le cui coordinate sono visibili in Tab. 6.

Node	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	Node	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]
1	0.0	0.0	0.0	5	3.0	0.0	1.0
2	6.0	0.0	2.0	6	6.0	2.0	2.0
3	6.0	4.0	2.0	7	3.0	4.0	1.0
4	0.0	4.0	0.0	8	0.0	2.0	0.0

Tab. 6 Coordinate nodali della superficie master

Sono quindi state testate le funzioni scritte in Fortran 90 all'interno del modulo *cContact*:

<i>contactPair()</i>	<i>tangentVector()</i>	<i>normalVector()</i>
----------------------	------------------------	-----------------------

Per semplicità di verifica, la superficie è stata disposta su di un piano inclinato (v. Fig. 47).

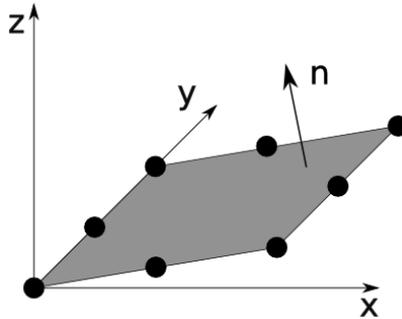


Fig. 47 Definizione del vettore normale

In un punto generico si ha: $\mathbf{t}_1=[3,0,1]$ e $\mathbf{t}_2=[0,1,0]$ e il vettore normale risulta essere $\mathbf{n}=[-1,0,3]$ con modulo $\|\mathbf{n}\| = 3.16227766$. I coseni direttori sono stati trovati “scalando” la normale in modo da assegnare ad essa un modulo unitario:

$$\frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = [-0.3162266, 0.000, 0.94868329]$$

Allo stesso modo i valori ottenuti numericamente sono stati riportati in Tab. 3.

	<i>Comp 1</i>	<i>Comp 2</i>	<i>Comp 3</i>
t_1	3.0000000	0.0000000	1.0000000
t_2	0.0000000	1.0000000	0.0000000
n	-0.3162266	0.0000000	0.94868329

Tab. 7 Valori numerici dei vettori t_1 , t_2 ed n .

Essendo la superficie disposta su di un piano, gli stessi risultati sono stati ottenuti variando il punto di applicazione all'interno della superficie.

4.6.5 Definizione legame tensioni deformazioni

La definizione del tensore di deformazione nella coppia di contatto avviene considerando le componenti di spostamento definite nei punti di contatto ad ogni step.

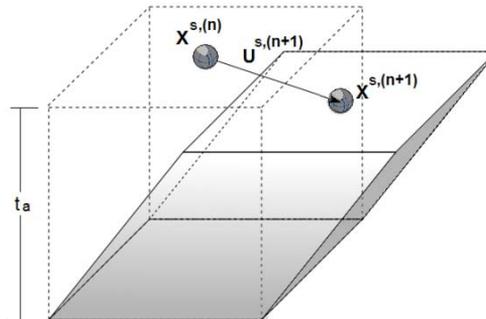


Fig. 48 Deformazione del volume di interfaccia associato alla coppia di contatto

Le componenti di spostamento del nodo slave \mathbf{x}^s allo step $t+1$ sono direttamente ricavate dalla soluzione del sistema $\mathbf{Ku}=\mathbf{F}$, ottenuto a valle dell'applicazione del metodo agli elementi finiti; al contrario la determinazione delle componenti di spostamento del punto master $\mathbf{x}^m(\xi_1, \xi_2)$, non essendo un nodo della discretizzazione, deve derivare considerando i nodi che individuano l'elemento master contenente il punto della coppia (v. Fig. 39). Si chiami $\mathbf{u}^{i,t+1}$ il vettore spostamento di un nodo master appartenente all'elemento che contiene il punto master della coppia corrente, lo spostamento $\mathbf{u}^{m,t+1}$ sarà definito come:

$$\mathbf{u}^{m,t+1} = \sum_{i=1}^n N^i(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}^{i,t+1} \quad (4.41)$$

Attraverso le (4.41) si possono determinare le variazioni di spostamento attribuite all'interfaccia.

Il tensore delle piccole deformazioni è calcolato mediante le classiche relazioni della meccanica del continuo:

$$\varepsilon_{ij}^{t+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{t+1}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{t+1}}{\partial x_i} \right) \quad (4.42)$$

intendendo con $i,j=1,2,3$ le tre componenti che coincidono rispettivamente con le direzioni (x,y,z) del s.d.r. globale, che sarà aggiornato ad ogni step.

Numericamente, essendo il tensore di deformazione un tensore simmetrico, può essere definito in forma vettoriale, cioè rispetto al s.d.r. globale:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \right]^T \quad (4.43)$$

La determinazione del tensore delle tensioni avviene attraverso il legame costitutivo visto in precedenza. Nel modello numerico è stato realizzato un legame di tipo elasto-danneggiativo, allo scopo di simulare il fenomeno di de laminazione, una volta raggiunto il valore limite di resistenza del

collegamento. Come spiegato nei capitoli precedenti è stato impiegato il modello di danno sviluppato da Mazars in (Mazars, 1986).

Il modello di danno richiede la conoscenza delle deformazioni principali per il calcolo della variabile di danno d . La determinazione delle componenti di deformazione principale avviene attraverso la risoluzione dell'equazione secolare (equivalente a quella che generalmente viene risolta per la valutazione delle tensioni principali):

$$\lambda^3 - J_1^\varepsilon \lambda^2 + J_2^\varepsilon \lambda - J_3^\varepsilon = 0 \quad (4.44)$$

dove sono stati indicati con J_i^ε i primi tre invarianti del tensore di deformazione. La risoluzione dell'equazione di terzo grado (4.44) determina le deformazioni principali con la convenzione: $\varepsilon_{11} \geq \varepsilon_{22} \geq \varepsilon_{33}$. La procedura numerica per la risoluzione dell'equazione (4.44) è descritta nel Box 9.

La risoluzione numerica di un'equazione di terzo grado può avvenire in vari modi.

Un semplice metodo è il seguente:

- nota una soluzione e quindi un divisore,
- abbassare di grado l'equazione e trovare le due soluzioni rimanenti in modo diretto.

Considerando l'equazione (4.44) I primi tre invarianti di un tensore simmetrico ϵ sono definiti come:

$$J_1 = tr(\epsilon) ; J_2 = \frac{1}{2} \left((tr(\epsilon))^2 - tr(\epsilon^2) \right) ; J_3 = det(\epsilon) \quad (4.45)$$

La prima soluzione per la determinazione del divisore dell'equazione di terzo grado avviene attraverso il metodo iterativo di Newton-Raphson.

Considerando quindi la soluzione approssimata: $\lambda \approx \lambda^{n+1} + \Delta \lambda^{n+1}$, lo schema iterativo risulta:

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n - \frac{f(\lambda^n)}{f'(\lambda^n)} \quad (4.46)$$

La prima soluzione della funzione è definita quando $f(\lambda_1) = f(\lambda^{n+1}) < TOLL$.

E' poi possibile ridurre di grado andando a dividere l'equazione secolare (4.44) per λ_1 .

$$(\lambda - \lambda_1) \left[J_1 \lambda^2 + (J_1 \lambda_1 - J_2) \lambda + (J_3 + (J_1 \lambda_1 - J_2)) \right] \quad (4.47)$$

Con la risoluzione diretta dell'equazione di secondo grado contenuta tra le parentesi quadre in (4.47) si ricavano le soluzioni λ_2, λ_3 , e, come detto in precedenza, ordinando in modo crescente le λ_i , si ottengono le deformazioni principali $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$.

Box 9 Soluzione numerica di un'equazione di terzo grado

La determinazione della variabile danno d è stata eseguita seguendo le indicazioni scritte nel capitolo dedicato alla meccanica del danneggiamento.

Essendo la variabile danno indipendente dalla direzione, la matrice costitutiva può essere definita come:

$$\mathbf{D}^c = \begin{bmatrix} (1-d)E_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-d)E_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-d)E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-d)G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-d)G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-d)G_{yz} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Considerando le direzioni principali si ha:

$$\mathbf{D}^c = \begin{bmatrix} (1-d)E_x & 0 & 0 \\ 0 & (1-d)E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1-d)E_z \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

4.6.6 Costruzione della matrice di rigidezza nella coppia di contatto.

Per la determinazione della matrice di rigidezza della coppia di contatto, si deve tener conto che alla coppia è stato associato un volume di interfaccia di dimensioni $V_I=(\Delta x \times \Delta y \times t_a)$ in cui i termini Δx , Δy rappresentano l'area di influenza di ogni nodo slave rispetto la discretizzazione che ne definisce la superficie; mentre t_a rappresenta lo spessore iniziale di interfaccia.

Il calcolo della rigidezza associata alla coppia di contatto considera inizialmente l'elemento di volume e successivamente il passaggio alla formulazione nodale, necessaria per eseguire l'assemblaggio compatibile con il resto della discretizzazione.

E' noto che nell'elemento di volume, la variazione di spostamento è data da:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta x} (u^s - u^m) & ; & \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y} (u^s - u^m) & ; & \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{t_a} (u^s - u^m) \\
 \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta x} (v^s - v^m) & ; & \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y} (v^s - v^m) & ; & \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{t_a} (v^s - v^m) \\
 \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta x} (w^s - w^m) & ; & \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y} (w^s - w^m) & ; & \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{t_a} (w^s - w^m)
 \end{aligned}
 \tag{4.50}$$

Il tensore delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ si determina attraverso l'equazione:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}^{c*} \Delta \mathbf{u} \quad (4.51)$$

che scritta in forma estesa risulta:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\Delta x & 0 & 0 \\ 0 & 1/\Delta y & 0 \\ 0 & 0 & 1/t_a \\ 1/\Delta y & 1/\Delta x & 0 \\ 1/t_a & 0 & 1/\Delta x \\ 0 & 1/t_a & 1/\Delta y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (u^s - u^m) \\ (v^s - v^m) \\ (w^s - w^m) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Il tensore delle tensioni nell'elemento di volume di interfaccia si determina mediante la legge costitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^c \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^c \mathbf{B}^{c*} \Delta \mathbf{u} \quad (4.53)$$

La matrice di rigidità associata all'elemento di volume V_1 risulta:

$$\mathbf{k}^{c*} = \int_{V_I} \mathbf{B}^{c*T} \mathbf{D}^c \mathbf{B}^{c*} dV_I \quad (4.54)$$

Ottenuta la rigidezza del volume V_I associata alla coppia di contatto, essa non è direttamente applicabile al metodo FEM in quanto il punto master che definisce la coppia non coincide con un nodo (v. Fig. 39), mentre il metodo associa i termini di rigidezza solo ai nodi. I termini di rigidezza del punto master devono essere assegnati ai nodi appartenenti all'elemento master che contiene il punto master della coppia. Questo avviene grazie alla matrice \mathbf{B}^c (Wriggers, 2006) definita come:

$$\mathbf{B}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -N_1(\xi_1^m, \xi_2^m) \mathbf{1} \\ -N_2(\xi_1^m, \xi_2^m) \mathbf{1} \\ \vdots \\ -N_n(\xi_1^m, \xi_2^m) \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

le n f.d.f. N_i , sono calcolate nel punto master della coppia descritto in coordinate locali $\boldsymbol{\xi}^m = (\xi_1^m, \xi_2^m)$; mentre il tensore $\mathbf{1}$ risulta essere il tensore identità:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

la matrice di rigidezza della coppia di contatto che dev'essere assemblata, è quindi:

$$\mathbf{k}^c = \mathbf{B}^c \mathbf{k}^{c*} \quad (4.57)$$

La matrice \mathbf{B}^c trasmette la rigidezza del volume V_1 ai nodi delle superfici di contatto. Come si può notare dalle (4.55), le prime 3 righe della (4.57) sono essenzialmente la matrice $\mathbf{1}$ moltiplicata per \mathbf{k}^{c*} , che assegna tutta la matrice di rigidezza \mathbf{k}^{c*} al nodo slave; le successive righe per l'effetto del principio di azione e reazione assegnano la matrice di rigidezza, con segno opposto, ai nodi dell'elemento master che contiene il punto della coppia, proporzionalmente alle funzioni di forma N_i dell'elemento master.

4.7 Esempio

Al fine di verificare la correttezza della procedura, si è riprodotto numericamente un esempio proposto in (Smith & Teng, 2001, 857-871). Si è considerata la trave in semplice appoggio di Fig. 49, di lunghezza $L = 500\text{mm}$ e caricata con un carico uniformemente distribuito $q = 100\text{N/mm}$. La trave, in calcestruzzo, presenta sezione rettangolare e ha dimensioni $100 \times 100\text{mm}^2$. Alla sua base è incollato un foglio di FRP di dimensioni $50 \times 2\text{mm}^2$. La lunghezza della fibra è pari a $L_p = 400\text{mm}$. Lo spessore (costante) di adesivo è pari a 2.5mm , mentre le caratteristiche dei materiali sono riassunte in Tab. 8.

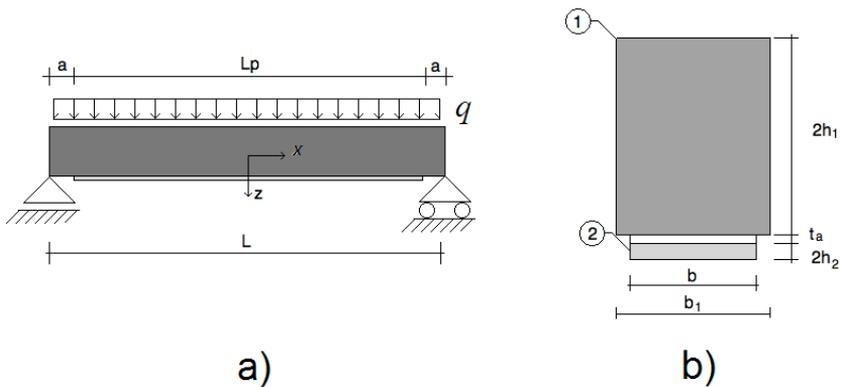


Fig. 49 Trave in semplice appoggio con carico uniformemente distribuito

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

<i>Componente</i>	<i>Larghezza [mm]</i>	<i>Altezza [mm]</i>	<i>E [MPa]</i>	<i>Poisson</i>
<i>Calcestruzzo</i>	<i>100.0</i>	<i>100.0</i>	<i>30000</i>	<i>0.2</i>
<i>FRP</i>	<i>50.0</i>	<i>2.0</i>	<i>200000</i>	<i>0.35</i>
<i>Adesivo</i>	<i>50.0</i>	<i>2.5</i>	<i>2000</i>	<i>0.35</i>

Tab. 8 Caratteristiche geometriche e dei materiali – test analitico-numerico

Il modello agli elementi finiti ha considerato $\frac{1}{4}$ di trave, potendone infatti sfruttare la simmetria geometrica e di carico (Fig. 50).

Il confronto fra risultati analitici e numerici relativamente all'andamento delle tensioni tangenziali e di peeling all'interfaccia è riportato in Fig. 51: gli andamenti risultano sostanzialmente identici, a meno di uno scostamento evidenziatosi per le sole tensioni tangenziali e circoscritto ad un tratto di interfaccia di lunghezza pari a 75 mm. Detto scostamento è attribuibile agli effetti bidimensionali di bordo che risultano riscontrabili sperimentalmente (è infatti noto come la distribuzione delle tensioni tangenziali non sia uniforme sulla larghezza della fibra di FRP (Pellegrino & Tinazzi, 2008, 180-189; Subramaiam & Carloni, 2007, 578-594)) e che numericamente possono essere riprodotti solo attraverso adeguate modellazioni tridimensionali (come si illustrerà più diffusamente nel seguito). Detta disuniformità non è infatti riproducibile attraverso approcci analitici (o numerici) monodimensionali. Una volta raggiunta una distribuzione uniforme di tensione (Fig. 52), si ripristina la sovrapposizione fra le curve analitico-numeriche.

Un simile scostamento non è ravvisabile nei diagrammi relativi alle curve di peeling, presentandosi infatti numericamente una distribuzione costante sulla larghezza della fibra per la componente normale di tensione (non risultano peraltro essere disponibili sperimentazioni che possano descrivere il contributo di questa componente né quindi la sua distribuzione).

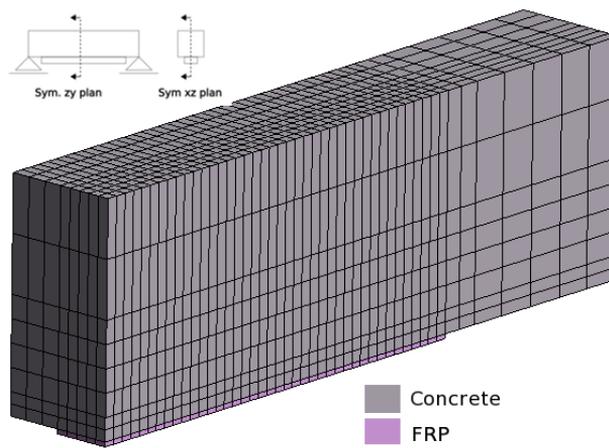


Fig. 50 Modello F.E. – test analitico-numerico

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

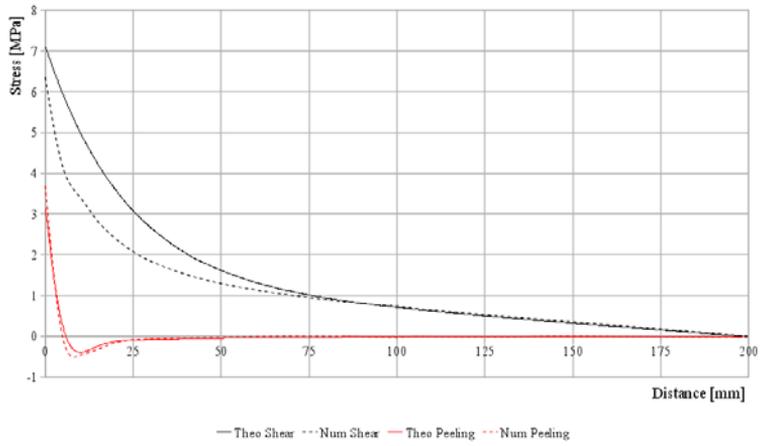


Fig. 51 Confronto fra risultati analitici e numerici

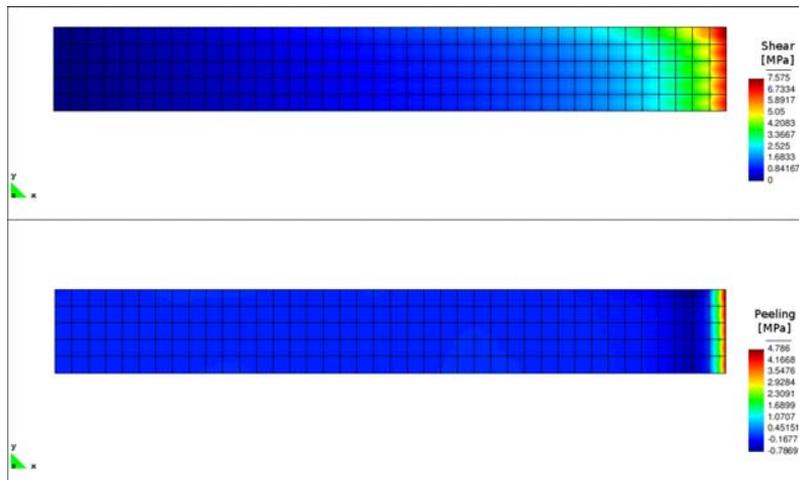


Fig. 52 Mappa delle tensioni tangenziali e di peeling nello strato di interfaccia

5 TRATTAMENTI SUPERFICIALI

5.1 Introduzione

Sin qui il collegamento fra FRP e calcestruzzo è stato trattato pensando che la zona in cui avviene il collegamento sia realizzata mediante superfici perfettamente piane e uno strato di adesivo uniforme che aderisce perfettamente ai componenti (Smith & Teng, 2001, 857-871). Questa ipotesi è generalmente valida quando si considerano bassi valori tensionali (e quindi di carico applicato) e si assume una legge di comportamento tensioni-deformazioni lineare in corrispondenza al collegamento. All'aumentare delle sollecitazioni si innescano effetti non lineari collegati al graduale deterioramento della connessione fino alla rottura completa, fenomeno che innesca e propaga il processo di delaminazione. Per spiegare tale processo è quindi necessario indagare l'effettiva forma della zona di contatto tra FRP e calcestruzzo.

Nella tecnica di realizzazione del composito, prima della fase di incollaggio delle fibre, la superficie di calcestruzzo in cui viene eseguito il collegamento è preliminarmente “trattata” mediante operazioni meccaniche che hanno il compito di aumentare la scabrezza, come indicato in Fig. 53. L'ipotesi si superfici perfettamente piane per descrivere l'interfaccia durante il processo di delaminazione, ipotesi assunta in generale per lo studio del fenomeno, potrebbe risultare riduttiva.



a) Spazzolatura



b) Smerigliatura



c) Bocciardatura



d) Sabbatura

Fig. 53 Altezza delle asperità al variare della trattamento della superficie di incollaggio.

Recentemente è stato indagato, per via sperimentale (Iovinella, 2010; Toutanji & Ortiz, 2001, 457-462), l'effetto della preparazione della superficie di incollaggio sul carico ultimo sopportato dal collegamento FRP-calcestruzzo, osservando che a parità di condizioni, si verifica una variazione della resistenza ultima del collegamento al variare della tecnica di preparazione, e quindi variando la scabrosità della superficie di calcestruzzo.

In questo capitolo si definisce una procedura possibile per poter rappresentare numericamente l'effetto che la preparazione della superficie di incollaggio riveste rispetto al carico ultimo del collegamento, andando a confrontare i risultati numerici ottenuti con la sperimentazione eseguita in (Iovinella, 2010).

5.2 Trattamenti Superficiali

La preparazione della superficie di calcestruzzo nella fase di pre-incollaggio delle fibre, ha il compito di aumentare la scabrezza e di togliere tutti i residui che la superficie esterna di calcestruzzo potrebbe avere e che andrebbero a ridurre la resistenza del collegamento (in particolar modo nel caso di strutture esistenti soggette ai fenomeni

naturali). Le tecniche più diffuse di preparazione della superficie, impiegate nella pratica costruttiva, risultano essere:

- *Spazzolatura manuale*, eseguita dagli operatori attraverso spazzole di acciaio atte ad eliminare un solo leggero strato di calcestruzzo dalla superficie trattata.
- *Spazzolatura meccanica*, effettuata attraverso trapano meccanico
- *Smerigliatura*, realizzata mediante asportazione dello strato di calcestruzzo attraverso un disco dentellato in forte rotazione.
- *Bocciardatura*, effettuata mediante uno strumento detto bocciarda, consistente in un martello con punte piramidali che scolpisce la superficie del conglomerato.
- *Sabbiatura*, ottenuta attraverso macchine sabbiatrici che, mediante getti in pressione di sabbia o altri materiali abrasivi, permettono l'asportazione del materiale, aumentandone la scabrezza.

Si tratta quindi di tutte quelle tecniche che hanno il compito di aumentare la scabrezza superficiale, andando ad eliminare strati di calcestruzzo e andando anche ad esporre gli inerti presenti nell'impasto.

A seguito delle operazioni meccaniche inerenti alla procedura di preparazione della superficie di incollaggio, la superficie risulta irregolare, soggetta ad asperità, che lo strato di adesivo, nella fase di incollaggio delle fibre andrà a colmare, (Fig. 54 a).

Il considerare quindi per i modelli sia matematici sia numerici uno strato omogeneo di adesivo, così come avviene normalmente, potrebbe risultare poco rappresentativo della realtà sperimentale; inoltre, pensare all'interfaccia come costituita da adesivo e calcestruzzo (come meglio evidenziato nel seguito) consente di poterne caratterizzare più approfonditamente il comportamento, nonché di utilizzare modelli costitutivi tipici del calcestruzzo, una volta adeguatamente tarati.

5.3 Modifica del Modello Numerico

A seguito delle osservazioni precedentemente svolte a riguardo della forma effettiva della superficie di calcestruzzo, si è modificato il modello numerico realizzato e descritto nei capitoli precedenti, per poter tener conto di queste irregolarità della superficie. L'idea principale è stata quindi quella di ripensare lo strato di adesivo come dato dalla distanza tra 2 piani paralleli posti a distanza pari all'altezza media delle asperità della superficie di incollaggio (Fig. 54 b)): tale distanza coincide, in questa ipotesi, con lo spessore (fittizio) t_a , originariamente di solo adesivo, e ora costituito da una matrice di adesivo-calcestruzzo.

Il tensore costitutivo dello strato di interfaccia D^C viene quindi a dipendere, oltre che dalle caratteristiche meccaniche dell'adesivo, anche da quelle del calcestruzzo.

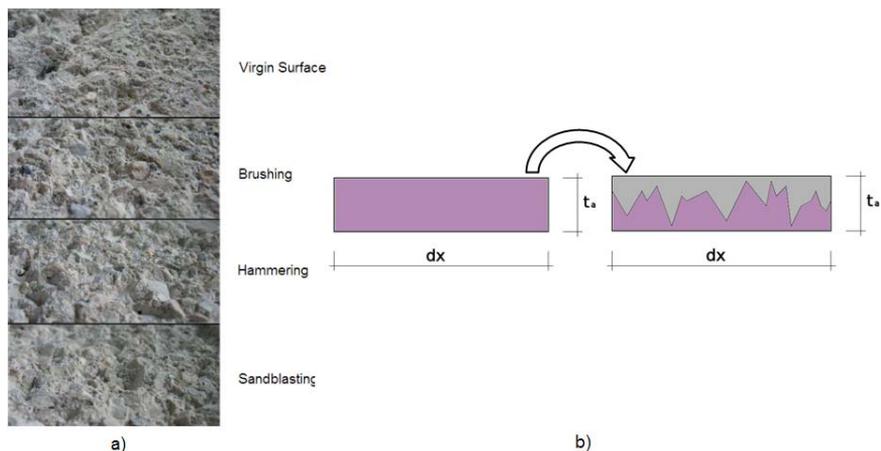


Fig. 54 a) Superfici di incollaggio al variare delle tecniche di preparazione; b) Rappresentazione schematica dello strato di interfaccia includente le asperità

Considerato quindi che sperimentalmente la delaminazione coinvolge un primo strato di calcestruzzo in prossimità della fibra, in cui risulta realistico inglobare le asperità superficiali dello strato di calcestruzzo incollato, lo studio del comportamento di interfaccia (peraltro risultante in un effetto di aumentato “aggrappo” dell’adesivo al calcestruzzo, tale da giustificare il fenomeno osservato) risulta possibile - e così giustificabile - utilizzare un legame costitutivo elasto-danneggiativo a livello di l’interfaccia. Si tenga

presente che il solo algoritmo di contatto non è in grado di rappresentare l'innescò e la successiva evoluzione del processo di delaminazione. Specificamente, si è scelto di far riferimento alla Meccanica del Danneggiamento, secondo la formulazione proposta da Mazars (Mazars, 1986). L'approccio di questo Autore è notoriamente riconosciuto come un approccio adeguato alla modellazione del comportamento di materiali quali i calcestruzzi.

Dal punto di vista numerico, l'elemento di volume che caratterizza la coppia di contatto nell'algoritmo che descrive l'interfaccia, dev'essere quindi interpretato come un elemento composto sia da calcestruzzo che da adesivo, come visualizzato in Fig. 55.

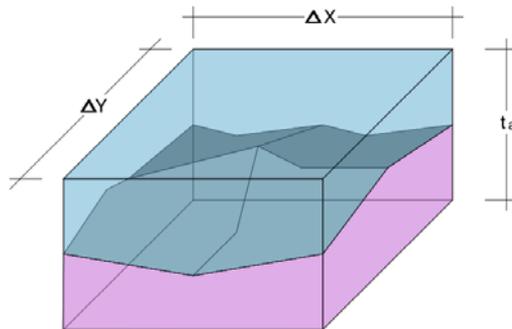


Fig. 55 Elemento di volume associato alla coppia di contatto

La distanza t_a , come spiegato precedentemente, rappresenta l'altezza media delle asperità. Il tensore costitutivo della coppia di contatto

$\mathbf{D}^c = \mathbf{D}^c(d)$ risulta non lineare e il legame tensioni – deformazioni prende la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^c(1-d) & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}^c(1-d) & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^c(1-d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

In questo modo l'algoritmo di contatto, così come costruito, include la variabile di danno; corrispondentemente, quando in una coppia di contatto si verifica la condizione $d = 1$ (elemento completamente danneggiato) il contatto risulta **aperto**, cioè master e slave vengono separati e numericamente viene riprodotto l'innesco della delaminazione - e la sua eventuale, successiva prosecuzione - (si veda ad esempio la Fig. 56 relativa ad un caso tipico: la zona soggetta a danno unitario risulta completamente delaminata).



Fig. 56 Mappa di danneggiamento dell'interfaccia

La Fig. 56 mostra solo metà della superficie di interfaccia di un provino soggetto a una prova di “*single shear*” durante la fase di delaminazione.

La caratterizzazione del materiale di interfaccia è stata eseguita considerando un materiale omogeneizzato, mediante una media pesata tra la percentuale di volume interessato dalle asperità $V_c\%$, e quella dell’adesivo $V_a\%$, attraverso la seguente relazione:

$$E_i = D_{ii,0}^C = \frac{E_{c,i}V_{c,i}\% + E_{a,i}V_{a,i}\%}{V_{c,i}\% + V_{a,i}\%} \quad (5.2)$$

in cui il pedice i identifica la direzione x , y o z considerata, mentre $D_{i,0}^C$ coincide con il tensore costitutivo dell'interfaccia in caso di materiale vergine ($d = 0$).

L'interfaccia risulta quindi essere costituita da un materiale omogeneizzato calcestruzzo - resina, ortotropo e caratterizzato da una legge costitutiva elastico - danneggiativa.

5.4 Test di confronto numerico - sperimentale

Le verifiche del modello numerico sono state eseguite confrontando test a "single shear" svolti in (Iovinella, 2010), con la rispettiva simulazione numerica.



Fig. 57 Test a "single shear" (Iovinella, 2010)

Il setup di prova è rappresentato in Fig. 57, dove si nota la fascia di FRP incollata su un provino piano di calcestruzzo, incastrato alla base e ad un'estremità. Il vincoli associati al provino hanno il compito di ridurre al minimo gli effetti flessionali che possono essere presenti durante la trazione del foglio di FRP, trazione che avviene parallelamente alla fascia incollata, con simultanea riduzione al minimo delle eccentricità e tale da indurre esclusivamente un'azione tagliante all'interfaccia. Alla superficie

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

esterna di FRP sono incollati estensimetri monodirezionali, la cui funzione è quella di rilevare la deformazione della fibra. I test sono stati effettuati variando la preparazione della superficie di incollaggio di calcestruzzo, ottenendo curve forze – spostamenti e andando a stabilire l'entità del carico ultimo del collegamento.

Le caratteristiche meccaniche dei materiali impiegati per la realizzazione dei test sono riportati in Tab. 9.

<i>Materiale</i>	<i>E_x [MPa]</i>	<i>E_y [MPa]</i>	<i>E_z [MPa]</i>	<i>Coeff. di Poisson</i>	<i>Spessore [mm]</i>
<i>Calcestruzzo</i>	<i>24700</i>	<i>24700</i>	<i>24700</i>	<i>0.1</i>	<i>150</i>
<i>FRP</i>	<i>250000</i>	<i>250000</i>	<i>250000</i>	<i>0.2</i>	<i>0.5</i>
<i>Interfaccia</i>	<i>13850</i>	<i>13850</i>	<i>24700</i>	<i>0.0</i>	<i>Variabile</i>

Tab. 9 Caratteristiche meccaniche dei materiali impiegati

Come spiegato precedentemente le caratteristiche dell'interfaccia sono state valutate mediante la (5.2) che tiene conto della % volumetrica delle asperità e dell'adesivo.

I modelli numerici sviluppati per la simulazione delle prove a “*single shear*”, tradotti in procedure numeriche inserite nel codice di ricerca sviluppato, sono stati realizzati impiegando elementi brick a 20 nodi con vincoli compatibili a quelli descritti precedentemente per i provini testati in laboratorio. Considerando inoltre la simmetria geometrica e di carico,

nonché il fatto che le prove sono di tipo quasi-statico, e che sono esclusi effetti dinamici, e adottando vincoli di simmetria, si considera una metà del modello complessivo (Fig. 58).

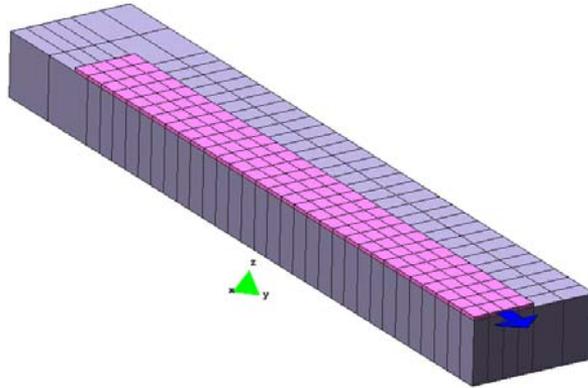


Fig. 58 Modello numerico, test a "single shear"

È stata attribuita una percentuale volumetrica di calcestruzzo pari al 50 ed al 100% rispetto alle direzioni (x, y) e z, rispettivamente.

Variando l'altezza delle asperità, al variare della preparazione della superficie di incollaggio, sono stati ottenuti valori di carico ultimo aderenti a quelli sperimentali (Tab. 10, Fig. 59), dimostrando così la correttezza dell'approccio seguito. Si è inoltre confermata l'evidenza

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

Superficie di preparazione	Altezza media asperità t_a [mm]	Carico ultimo test sperimentali [kN]	Carico ultimo simulazioni numeriche [kN]
Sabbiatura	2.7	25.31	25.89
Bocciardatura	2.4	23.48	22.98
Spazzolatura	1.6	17.62	15.85

Tab. 10 Confronto altezza media asperità e carichi ultimi

sperimentale secondo cui asperità maggiori garantiscono una maggior resistenza del collegamento.

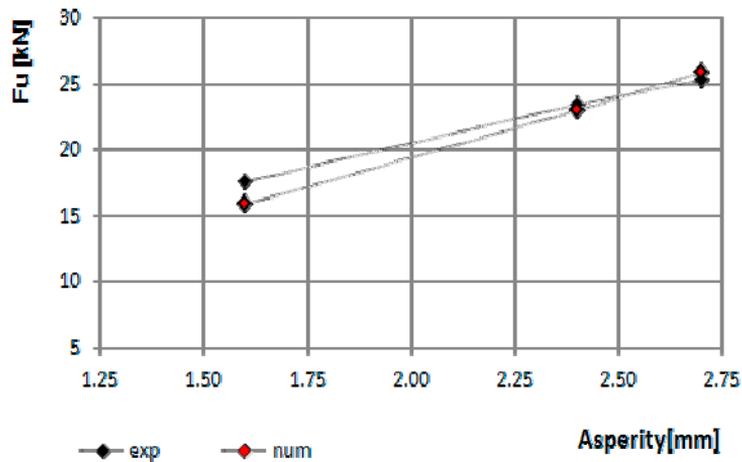


Fig. 59 Carico ultimo (sperimentale e numerico) vs. altezza delle asperità

Si sono ricavati anche gli andamenti delle tensioni tangenziali e di peeling (Fig. 60, Fig. 61) all'interfaccia, durante l'intero processo di delaminazione.

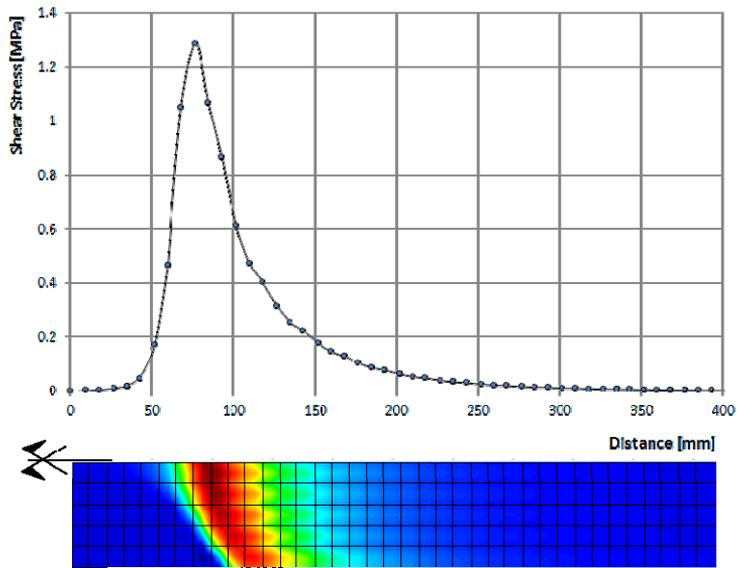


Fig. 60 Andamento delle tensioni tangenziali durante la delaminazione

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

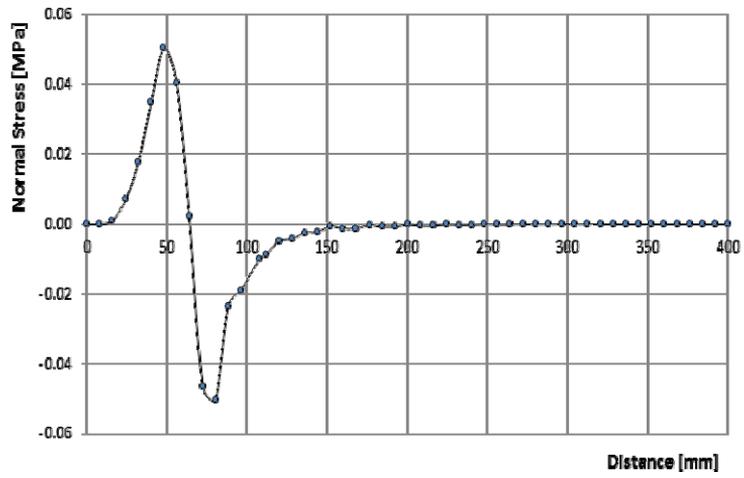


Fig. 61 Andamento delle tensioni di peeling durante la delaminazione

6 SPERIMENTAZIONE

6.1 Introduzione

In questo capitolo si descrive la sperimentazione seguita per validare il modello numerico sviluppato.

I test considerati, per la valutazione del rinforzo a rottura, per carichi di breve durata, sono stati eseguiti mediante prove di tipo “*double shear*” con lo scopo di valutare il carico ultimo del collegamento, nonché gli stati deformativo e tensionale all’interfaccia.

La valutazione degli effetti differiti è stata condotta mediante test a trazione sulla matrice epossidica e prove a flessione su travetti in calcestruzzo con rinforzo in FRP. I test a trazione hanno avuto lo scopo di valutare le caratteristiche viscoso della matrice polimerica impiegata nel collegamento, mentre le prove a flessione hanno definito il

comportamento globale nel rinforzo, mediante la determinazione della variazione di deformazione nel tempo in opportuni punti dell'interfaccia FRP - calcestruzzo.

6.1.1 Caratteristiche dei materiali FRP

Una prima indagine è stata eseguita con l'obiettivo di definire le caratteristiche meccaniche dei singoli componenti costituenti il rinforzo.

Tali caratteristiche sono fortemente dipendenti dai materiali impiegati che, nella pratica costruttiva, possono essere svariati. Nello specifico sono state utilizzate matrici ottenute da resine epossidiche, e fibre in carbonio monodirezionali.

6.1.2 Matrice

Generalmente prima della realizzazione del collegamento, si stende sull'interfaccia di calcestruzzo uno strato di resina, che ha il compito di garantire la solidarizzazione della matrice sul calcestruzzo. Questo materiale chiamato primer, consiste in una resina epossipoliamicica formata da due componenti miscibili. La superficie del supporto si deve preventivamente trattare tramite le tecniche meccaniche di preparazione della superficie di incollaggio. Le caratteristiche fisiche del primer sono riportate in Tab. 11.

<i>Aderenza al calcestruzzo</i>	$> \sigma_{t,cls}$
<i>Allungamento a trazione, ASTM D638</i>	3%
<i>Resistenza a trazione, ASTM D638</i>	$> 12 \text{ MPa}$
<i>Modulo elastico a trazione (tangente), ASTM D638</i>	717 MPa
<i>Resistenza a flessione, ASTM D790</i>	$> 24 \text{ MPa}$
<i>Modulo di elasticità a flessione, ASTM D790</i>	593 MPa
<i>Peso specifico, Kg/l</i>	Comp. A: 1.139 Comp. B: 0.996
<i>Tempo di lavorabilità</i>	-1°C : 8 ore 7°C : 2 ore 21°C : 45 min

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

	32°C : 25 min
<i>Tempo di ricopertura massimo</i>	48 ore

Tab. 11 Caratteristiche fisiche del Primer

Il primer viene è uno strato sottilissimo che non contribuisce ad incrementare la rigidità del collegamento, ma consente solo una migliore presa tra il calcestruzzo e la matrice epossidica.

La matrice utilizzata per l'impregnazione delle fibre di carbonio è di tipo epossidico, consistente in un composto bicomponente.

La polimerizzazione avviene, nel caso della resina impiegata, mediante unione dei due componenti a temperatura ambientale.

Le caratteristiche meccaniche sono riassunte in Tab. 12.

<i>Resistenza a trazione, ASTM D638</i>	54 MPa
<i>Modulo elastico a trazione (tangente), ASTM D638</i>	3034 MPa
<i>Allungamento a trazione, ASTM D638</i>	2.5%
<i>Resistenza a flessione, ASTM D790</i>	124 MPa
<i>Modulo di elasticità a flessione, ASTM D790</i>	3731 MPa
<i>Peso specifico, Kg/l</i>	1.02±0.024

<i>Viscosità, mPa s</i>	<i>1600</i>
<i>Tempo di lavorabilità</i>	<i>20°C : 30 min</i>
<i>Indurimento completo</i>	<i>7 giorni a 20°C</i>
<i>Tempo di ricopertura</i>	<i>7 giorni</i>

Tab. 12 Caratteristiche meccaniche Matrice

6.1.3 Fibre

Per i test si è scelta una fibra monodirezionale in carbonio, Fig. 62, in fogli da 0.165mm di spessore. L'applicazione consiste nello stendere il foglio sulla superficie del supporto su cui sia stato steso l'adesivo; successivamente le fibre vengono impregnate mediante rullatura. Questa procedura ha il compito di garantire la completa immersione delle fibre nella resina. Per ottenere una totale impregnazione, dopo la rullatura si stende un secondo strato di adesivo onde ricoprire completamente le fibre.



Fig. 62 Fibra in carbonio monodirezionale

Con questa procedura è possibile ottenere elementi di FRP con differenti strati di fibre, mediante sovrapposizione di fogli di fibre alternati a strati di resina. È anche possibile ottenere compositi con comportamento resistente in varie direzioni, sovrapponendo strati di fibre monodirezionali disposti ad angolazione variabile.

Esistono diverse tipologie di fibre di carbonio, il cui comportamento è connesso a differenziazioni delle proprietà meccaniche, ad es. il modulo elastico E e la resistenza ultima a trazione f_r .

Le caratteristiche meccaniche delle fibre impiegate nella sperimentazione sono riportate in Tab. 13.

<i>Resistenza a trazione</i>	<i>3430 MPa</i>
<i>Modulo elastico a trazione</i>	<i>230000 MPa</i>
<i>Deformazione ultima</i>	<i>1.5%</i>
<i>Densità, Kg/m³</i>	<i>1820</i>
<i>Densità superficiale, Kg x m²</i>	<i>0.300</i>
<i>Spessore tessuto a secco, mm</i>	<i>0.165</i>

Tab. 13 Fibre in carbonio

6.2 Prove a Taglio “*Double shear*”

Per la determinazione della resistenza di interfaccia FRP – calcestruzzo, sotto carico ultimo, sono state utilizzate prove a “*double shear*” sviluppate presso laboratori sperimentali dell’Università di Padova, i cui risultati sono riportati in (Pellegrino & Tinazzi, 2008, 180-189). Si descrive in questa sede la prova, in quanto la stessa verrà ripresa più avanti per eseguire confronti con i modelli numerici sviluppati.

Il setup di prova prevede la messa a punto di due prismi di calcestruzzo a sezione quadrata, connessi esclusivamente da due fasce di FRP applicate su due facce opposte degli elementi in calcestruzzo. Il test di "double shear" consiste nel sottoporre a trazione il provino mediante due barre d'acciaio fuoriuscenti dai due prismi in conglomerato che ammorstate alla macchina di prova, vengono poste in trazione (Fig. 63) fino al completo distacco del rinforzo.



Fig. 63 Setup del test "Double Shear"

Le dimensioni dei prismi in calcestruzzo sono le seguenti: 100×100×300mm, mentre la larghezza delle fasce di FRP è assunta pari a 50mm.

Il database completo della sperimentazione è riportato in (Pellegrino & Tinazzi, 2008, 180-189).

6.2.1 Procedimento analitico per la determinazione dei risultati

La determinazione dello stato tensionale di interfaccia, relativamente alla prova illustrata nel precedente §, si ottiene mediante una legge che mette in relazione le deformazioni, misurate sperimentalmente a mezzo di estensimetri monodirezionali opportunamente applicati al provino, con le tensioni tangenziali. È stata quindi ricavata una relazione del tipo $\tau = \tau(\varepsilon)$, essendo ε la deformazione letta dallo strain gauge.

Considerando un problema monodimensionale, si può ricavare l'equazione di equilibrio di interfaccia a partire dalla considerazione di un elemento infinitesimo dz di rinforzo, Fig. 64,

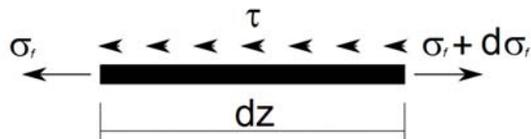


Fig. 64 Condizione di equilibrio nella fibra

Si possono quindi definire le tensioni di taglio τ di interfaccia come:

$$n \cdot t \cdot d\sigma_f = \tau dz \quad (6.1)$$

essendo t lo spessore della fibra ed n il numero di strati, mentre σ_f coincide con la tensione normale applicata alla fibra. Nell'ipotesi di comportamento elastico lineare monodimensionale, chiamando E_f il modulo elastico della fibra, risulta valida la relazione:

$$d\sigma_f = E_f d\varepsilon_f \quad (6.2)$$

Attraverso la (6.1) e la (6.2) si ottiene:

$$\tau(x) = n \cdot t \cdot E_f \cdot \frac{d\varepsilon_f}{dx} \quad (6.3)$$

Nella sperimentazione, le misure di deformazione sono fornite dagli strain gauges come punti discreti lungo la lunghezza ancorata. La formula (6.3) può essere quindi risolta attraverso il metodo delle differenze finite, Fig. 65.

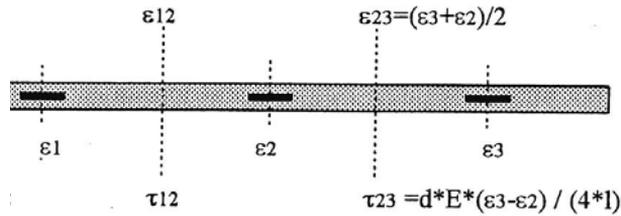


Fig. 65 Determinazione attraverso le differenze finite della tensione tangenziale

Per aumentare il numero dei valori acquisiti ai quali fare riferimento si è inoltre deciso in sede di analisi di considerare come “punti fissi” anche i valori ottenuti dalla media tra due strain-gauges consecutivi, assumendo quindi una variazione lineare di deformazione tra due estensimetri successivi.

Dalle letture di deformazione, definite per uno stesso livello di carico ε_i si sono ottenute le $\tau_i = \tau_i(z_i)$ mediante la risoluzione dell'equazione alle differenze finite:

$$\tau_i(z_i) = \frac{1}{2} n \cdot t \cdot E_f \left(\frac{\varepsilon_{f,i-1} - \varepsilon_{f,i}}{z_i - z_{i-1}} + \frac{\varepsilon_{f,i} - \varepsilon_{f,i+1}}{z_{i+1} - z_i} \right) \quad (6.4)$$

in cui si è assunto l'asse z parallelo all'asse longitudinale della striscia di rinforzo con origine nell'estremità caricata della stessa, inizio della zona di aderenza, e verso opposto alla forza di trazione.

Definendo lo slip s come scorrimento relativo tra rinforzo (FRP) e substrato (calcestruzzo o malta), si ha:

$$\frac{ds}{dz} = \varepsilon_f - \varepsilon_c \cong \varepsilon_f \quad (6.5)$$

avendo posto che la deformazione del calcestruzzo all'interfaccia ε_c sia trascurabile rispetto a quella della fibra ε_f . La variazione dello scorrimento lungo la direzione z può essere definita come:

$$s(z) = s(0) + \int_0^z \varepsilon_f(z) dz \quad (6.6)$$

che sviluppata per differenze finite risulta:

$$s(z_i) = s(z_n) + \frac{1}{2} \sum_{j=n}^i (\varepsilon_{j-1} + \varepsilon_j) (z_{j-1} - z_j) \quad (6.7)$$

6.2.2 Risultati Sperimentali

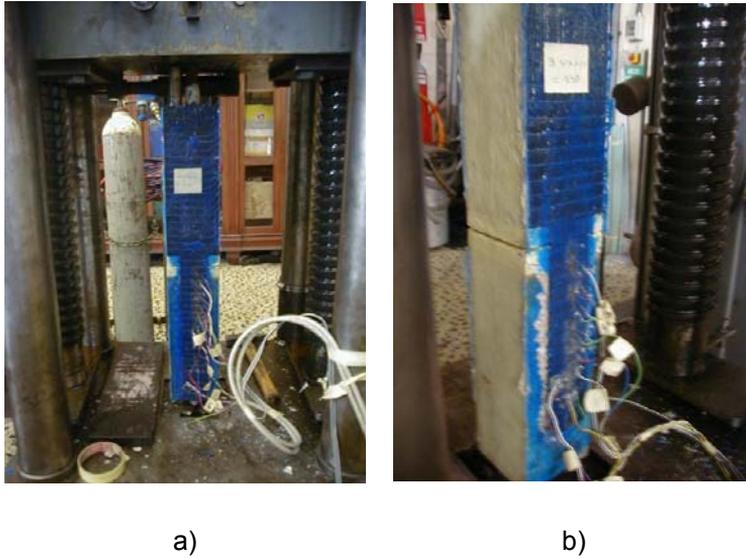


Fig. 66 a) Setup della prova a double shear b) Provino post delaminazione

In Fig. 66 si mostra un tipico provino inserito nella macchina di prova. In Fig. 66 a) si nota che l'area di rinforzo nel prisma di calcestruzzo superiore risulta maggiore rispetto a quella del prisma inferiore. Questo accorgimento è stato adottato per poter controllare la zona di delaminazione e strumentare solo un lato del collegamento; infatti in Fig. 66 b) si ha un'immagine del distacco completo del rinforzo dal prisma inferiore di calcestruzzo.

Un tipico diagramma deformazione – posizione è riportato in Fig. 6,

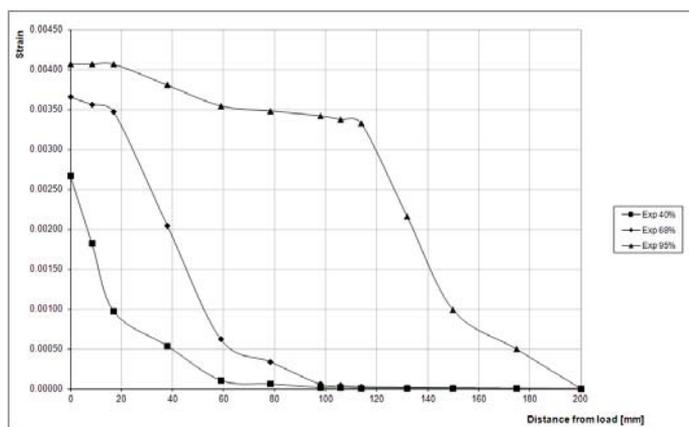


Fig. 67 Deformazioni vs. Posizione

ove compare il valore delle deformazioni lette agli estensimetri al variare del livello di carico, riportato in legenda in % rispetto al valore del carico

ultimo. Il plateau quasi orizzontale presente nelle curve al 68 e al 95% del carico ultimo applicato coincide con l'area di rinforzo delaminata. Partendo da questi valori di deformazione, mediante l'equazione (6.4) sviluppata precedentemente è stato ricavato l'andamento delle tensioni tangenziali di interfaccia durante il processo di carico, Fig. 68.

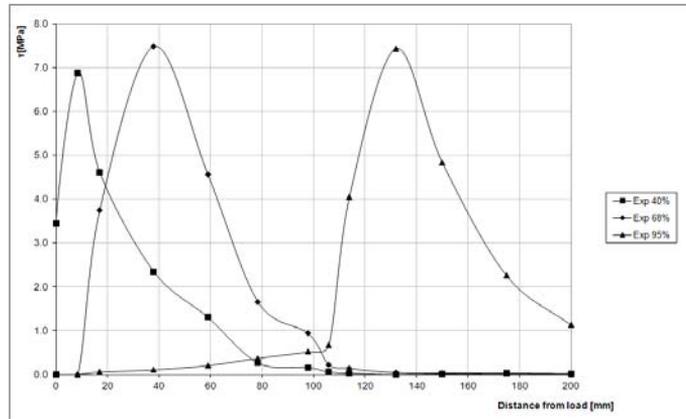


Fig. 68 Tensioni tangenziali vs. posizione

Analogamente si definito lo slip grazie all'equazione (6.7) qui riportato in Fig. 69

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

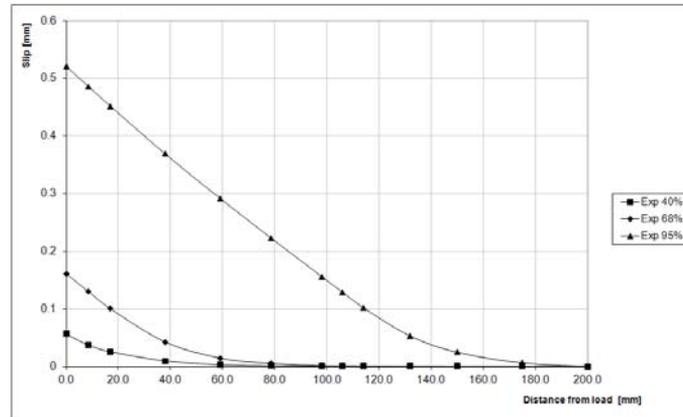


Fig. 69 Slip vs. Posizione

Essendo le misurazioni effettuate limitate all'asse di simmetria del rinforzo, la valutazione dello stato tensionale e deformativo ottenuto mediante le equazioni alle differenze finite viste prima non è in grado di rappresentare gli effetti di bordo che il rinforzo presenta.

6.3 Caratterizzazione della resina epossidica per effetti differiti

Il rinforzo di FRP è essenzialmente un composito formato da una resina e da fibre in carbonio. Come anticipato nei capitoli precedenti, gli effetti differiti di questa tipologia di materiali sono da imputare alla matrice che è stata quindi testata, mentre le fibre di carbonio non sono soggette a questa tipologia di fenomeni, e contribuiscono solo a “rallentare” lo stesso.

Le proprietà elasto-viscose della resina epossidica impiegata sono state determinate attraverso una prova di trazione monoassiale, sotto carico costante di lungo periodo. I campioni sono stati fissati attraverso piastre di acciaio imbullonate, per evitare eventuali scorrimenti del collegamento (Fig. 70).

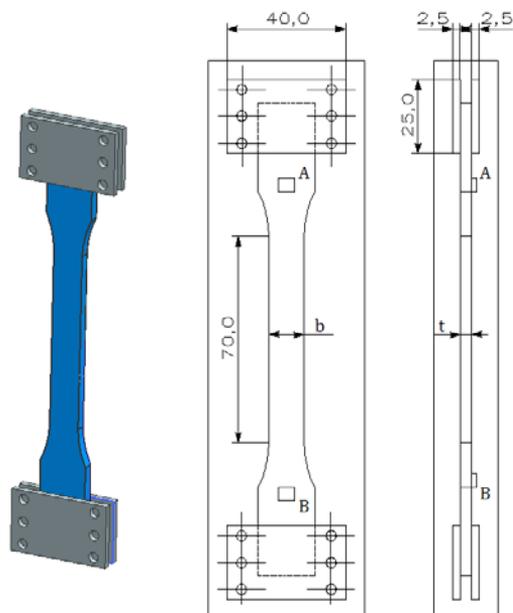


Fig. 70 Schema provino monoassiale

Successivamente i provini sono stati appesi e caricati mediante carichi verticali monodirezionali. In questo modo il carico applicato è risultato sempre perfettamente costante; inoltre per minimizzare gli effetti dovuti alle variazioni termiche ambientali, i campioni sono stati posizionati in appositi locali la cui temperatura è risultata poco variabile durante il periodo dell'indagine.

Il parametro di misura rilevato coincide con la variazione di lunghezza del provino nel tempo. La "lunghezza del provino" corrisponde alla distanza

AB in Fig. 70, cioè la distanza tra due placche di acciaio incollate sui campioni in corrispondenza dei punti A e B. Le placche hanno garantito di effettuare la misura sempre nella stessa posizione per una maggiore precisione di misura.

Per il tempo $t = t'$ (tempo di applicazione del carico) si sono valutati la deformazione istantanea e lo stato tensionale (che risulta sempre costante nel tempo), si è quindi ricavato il modulo elastico E_0 pari a 3193.76MPa.

Vista la conformazione geometrica del provino, e la tipologia di carico applicato, lo stato tensionale è stato determinato con la classica relazione valida per casi monoassiali: $\sigma = F/A$. La forza F coincide con il carico applicato, mentre A coincide con l'area della sezione. L'area A è stata misurata in corrispondenza della strizione del provino, andando a definire un'area media, dopo aver misurato in tre diversi punti della zona di strizione la larghezza e lo spessore del provino. I risultati sono proposti in Tab. 14 per entrambi i provini, e i valori medi ricavati.

	<i>Sapmle 1</i>		<i>Sapmle 2</i>	
<i>Positiom</i>	<i>t [mm]</i>	<i>b [mm]</i>	<i>t [mm]</i>	<i>b [mm]</i>
<i>middle</i>	4.02	12.83	4.61	13.40
<i>top</i>	3.70	12.86	4.74	12.93
<i>bottom</i>	3.78	12.82	4.43	12.90
<i>average</i>	3.83	12.84	4.59	13.08

Tab. 14 Dimensione della sezione dei provini

In Tab. 15 si è riportata la lunghezza iniziale L_0 dei campioni misurata come distanza AB Fig. 70 a provino scarico.

	$A [mm^2]$	$L_0 [mm]$	$F [N]$
<i>Sample 1</i>	49.21	107.42	181.92
<i>Sample 2</i>	60.07	108.47	183.16

Tab. 15 Area, lunghezza iniziale e carico applicato ai provini

In Tab. 15 è anche riportato il valore del carico applicato; essendo la viscosità un problema indipendente dallo stato tensionale, non è stato necessario mantenere lo stesso carico nei diversi provini.

La rilevazione della variazione di lunghezza è stata realizzata mediante calibro effettuando tre misurazioni alla volta e salvandone la media. Ottenuto il valor medio della variazione di lunghezza al tempo t , causata dal carico applicato al tempo t' : $\Delta L(t,t')$ si è definita la deformazione assiale al tempo t come $\epsilon = \Delta L/L_0$.

Noto lo stato tensionale costante nel tempo, è stato definito il valore della funzione di viscosità al tempo t : $J(t,t')$. Considerando il comportamento

monodimensionale insito nella prova, la funzione J è stata ricavata attraverso la formula ε/σ .

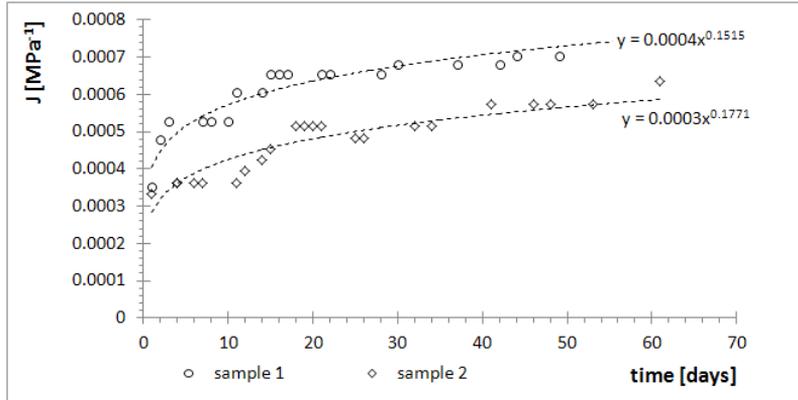


Fig. 71 Funzione di creep definita nei campioni testati

I diagrammi in Fig. 71 riportano i valori delle funzioni di viscosità ottenute dai campioni nonché una curva approssimante. La curva di viscosità J sperimentale per la matrice epossidica è stata definita attraverso media dei polinomi approssimanti, come indicato in Fig. 72.

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

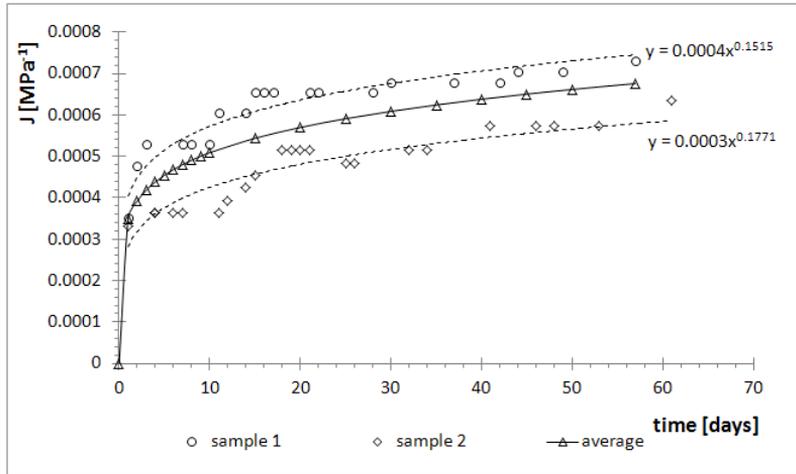


Fig. 72 Funzione di creep sperimentale

La sperimentazione sulla resina epossidica è servita per ottenere i coefficienti di materiale da inserire nel modello micromeccanico. Per poter ottenere i coefficienti c_i (con $i=1-4$) della funzione J_m del modello micromeccanico si è minimizzato l'errore tra la curva media sperimentale e l'equazione della J_m . In Fig. 73 è riportato il confronto tra le curve sperimentale e numerica.

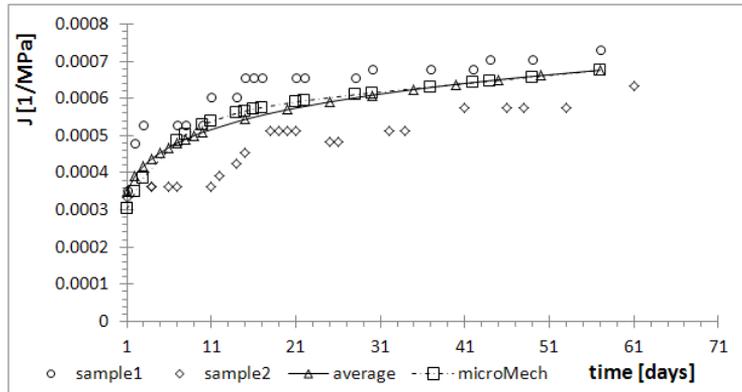


Fig. 73 Confronto curva di creep sperimentale con quella del modello micromeccanico

I coefficienti impiegati per la curva J_m così ricavata sono riportati in Tab. 16.

c_1	2.47E-04	MPa^{-1}
c_2	2.21E-06	$\text{MPa}^{-1}\text{h}^{-1}$
c_3	3.03E-04	MPa^{-1}
c_4	5.84E-05	$\text{MPa}^{-1}\text{h}^{-1}$

Tab. 16 Coefficienti del modello micromeccanico per la determinazione di J_m

6.3.1 Test per la calibrazione del modello numerico

Caratterizzato il materiale della resina epossidica mediante le prove riportate nel paragrafo precedente, è stato realizzato un modello FEM a partire dal codice sviluppato, andando a simulare gli effetti viscosi visti nella sperimentazione.

Il modello è composto da 2325 nodi con 352 elementi brick a 20 nodi, soggetto ad uno spostamento impresso.

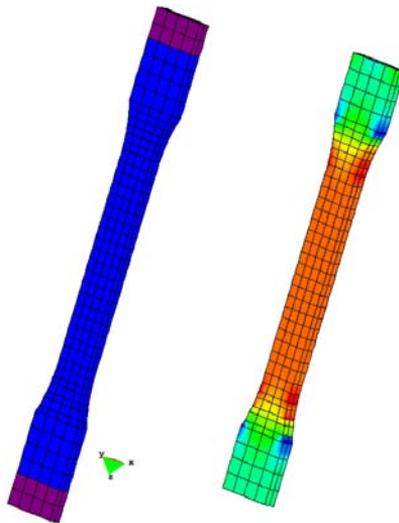


Fig. 74 Modello numerico test resina epossidica

Le condizioni di vincolo sono state assegnate agli elementi in viola di Fig. 74 compatibili con le piastre di acciaio viste in Fig. 70.

Il modello numerico realizzato è compatibile con una prova a *controllo di spostamento* (spostamento costante nel tempo), mentre il test sperimentale è definito attraverso una procedura a *controllo di forza* (forza costante nel tempo), ma per la determinazione della funzione di viscosità, questa variazione di procedura risulta del tutto ininfluenza.

Le caratteristiche assegnate al materiale sono riportate nel Box 10.

```

material
viscoElastic
elastic
1 3193.76 0.0
loadTime      1.00
!viscoelastic micromechanical model developed by Ascione
MicroMec
! 4 compliance function's parameters for matrix material
!      cm1      cm2      cm3      cm4
cm      2.47E-04  2.21E-06  3.03E-04  5.84E-05
vol_m 1.0
endMicroMec
endVe
end

```

Box 10 Caratteristiche del materiale assegnato al modello numerico

I risultati ottenuti numericamente si sovrappongono alla curva di partenza (quella micromeccanica riportata in Fig. 73) come era del resto prevedibile essendo il modello numerico calibrato su questa prova.

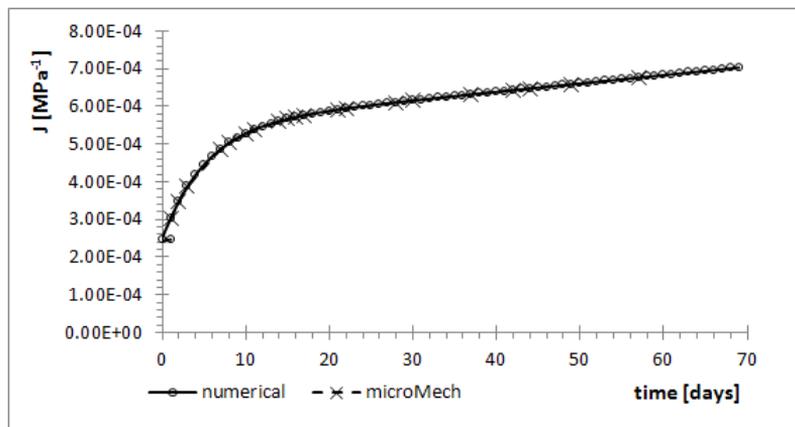


Fig. 75 Confronto curva di creep Numerica con quella sperimentale Micromeccanica

Si possono evidenziare gli effetti della fibra andando a studiare lo stesso problema, ma con l'aggiunta di una percentuale di fibra all'interno della matrice. Si considera un volume di fibra del 10% del totale matrice + fibra. In questo caso le caratteristiche del materiale del modello numerico risultano:

```
material
viscoElastic
elastic
2 3193.76 0.0
loadTime      1.00
!viscoelastic micromechanical model developed by Ascione
MicroMec
  ! 4 compliance function's parameters for matrix material
  !      cm1      cm2      cm3      cm4
  cm  2.47E-04  1.21E-06  3.03E-04  5.84E-05
  ! 4 compliance function's parameters for fibres material
  !      cf1      cf2      cf3      cf4
  cf  8.132e-6  2.097e-11  6.623e-6  8.599e-9
  !% of matrix volume
  vol_m 0.9
  !% of fibres volume
  vol_f 0.1
endMicroMec
endVe
end
```

Box 11 Caratteristiche del materiale assegnato al modello numerico (10% fibra 90% matrice)

Il confronto dei risultati è mostrato in Fig. 76 in cui si nota che le fibre “rallentano” l’effetto viscoso della matrice polimerica mantenendo più

bassa la funzione di creep J rispetto alla curva calcolata senza il contributo della resina.

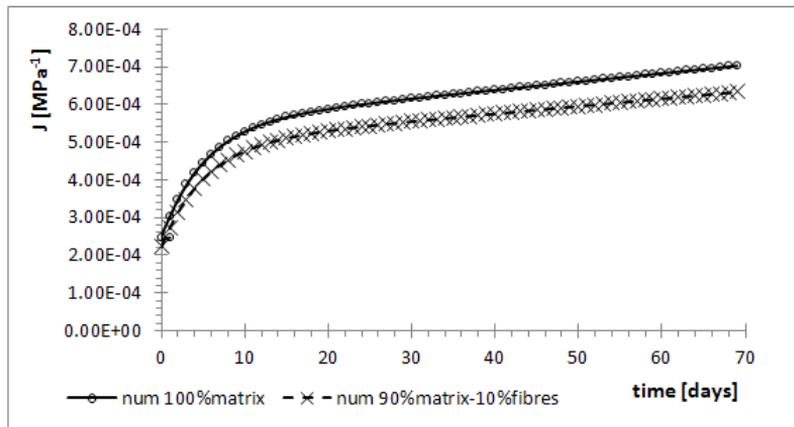


Fig. 76 Confronto tra modelli numerici con 100% di volume di resina e 90% di resina più 10% di fibre

6.4 Prove a lungo termine nei compositi FRP

Il comportamento globale dovuto agli effetti differiti nel composito calcestruzzo rinforzato con fogli o lamine di FRP è stato indagato

sperimentalmente attraverso una campagna sperimentale effettuata su travetti di calcestruzzo non armato - alla cui base è stato incollato un foglio di CFRP - caricati a flessione con un carico concentrato costante.

Prima della valutazione degli effetti di creep globali sono stati effettuati test per la determinazione delle caratteristiche meccaniche dei componenti.

6.4.1 *Determinazione delle caratteristiche meccaniche iniziali del calcestruzzo.*

Il calcestruzzo utilizzato è stato realizzato mediante un impasto con gli ingredienti riportati in Tab. 17:

$c =$	450	kg/m^3	<i>contenuto di cemento</i>
$a =$	1725	kg/m^3	<i>contenuto di aggregato</i>
$w =$	225	kg/m^3	<i>contenuto di acqua</i>

Tab. 17 *Mix design calcestruzzo*

Come prima fase della sperimentazione sono state determinate le caratteristiche di resistenza dei materiali impiegati mediante prove a compressione sui campioni di calcestruzzo per la determinazione della resistenza cubica.

I campioni di calcestruzzo sono stati ottenuti dai travetti utilizzati per i test, riducendone le dimensioni fino ad ottenere dei cubi regolari. Le dimensioni dei provini risultano di 100×100×100mm conformi alla normativa (UNI EN 12390-1, 2000) con tolleranza dell' 1% (± 1.5 mm), rispettosi dei requisiti di perpendicolarità delle facce (la tolleranza sugli angoli è $\pm 0.5^\circ$); le sulle superfici di prova presentano errore di planarità inferiore a 0.1 mm.



Fig. 77 Prova a compressione prismi in cls

In Fig. 77 si mostra la macchina di prova per la determinazione del carico a rottura.

In Tab. 8 si riportano i valori ottenuti di resistenza cubica dei provini testati.

<i>Campione n.</i>	<i>a [cm]</i>	<i>b [cm]</i>	<i>h [cm]</i>	<i>A [cm²]</i>	<i>M_t [Kg]</i>	<i>M_u [Kg/dm³]</i>	<i>R_c [N/mm²]</i>	<i>F_u [Kg]</i>
1	10.2	10.2	10	104	2.2	2.11	20.8	22000
2	10	10	10.2	100	2.14	2.12	22.2	22500

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI
INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

3	9.9	10.1	10.1	99	2.12	2.12	25.7	26000
4	10.2	10.1	10.1	103	2.2	2.12	23.8	25000
5	10	10.2	10.1	101	2.27	2.23	32.9	34000
6	10.1	10.2	10.1	103	2.28	2.21	33.4	35000

Tab. 18 Valori carichi di rottura cubetti di cls

I parametri a , b , h rappresentano le caratteristiche geometriche dei provini, A l'area delle basi, M_t è il peso del provino, M_u la densità di massa, R_c la resistenza caratteristica valutata, F_u il carico ultimo a rottura. La resistenza cubica media individuata risulta quindi pari a 26 MPa. Un quadro sintetico delle caratteristiche meccaniche dei travetti in calcestruzzo è mostrato in Tab. 19.

$R_{ck} =$	26	MPa
$f_{ck} =$	21.58	MPa
$f_{cm} =$	29.58	MPa
$E_0 =$	30459.46	MPa
Poisson	0.18	

Tab. 19 Caratteristiche meccaniche dei travetti in calcestruzzo

L'umidità relativa interna del provino può essere ritenuta costante e pari all'umidità ambientale, essendo stati detti provini stagionati per almeno 1000 giorni, un tempo sufficiente per una pressoché completa idratazione dei campioni. Essendo quindi le dimensioni dei campioni molto ridotte, si è attribuita un'umidità relativa interna del travetto pari all'umidità ambientale della camera di prova.

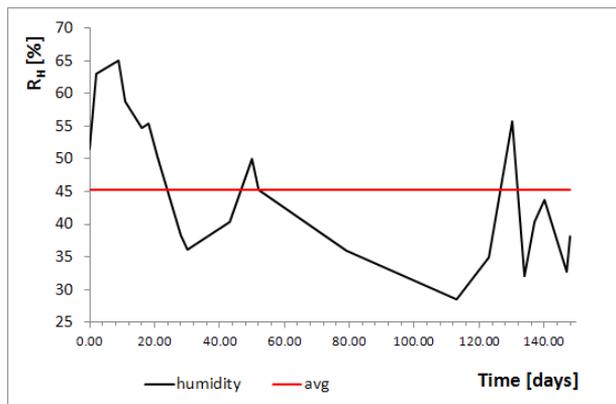


Fig. 78 Variazione dell'umidità ambientale R_H

È stata quindi monitorata l'umidità ambientale R_H presente nella camera di prova per circa 150 giorni; i valori sono riportati in Fig. 78. L'umidità relativa media risulta essere del 45.29%.

6.4.2 Caratterizzazione della resina

Le caratteristiche meccaniche della matrice polimerica sono state determinate attraverso la prova a trazione descritta nel paragrafo precedente e mediante i dati forniti dal produttore.

$E_0 =$	3193.76	MPa
$f_t =$	45	MPa
$f_c =$	80	MPa

Tab. 20 Caratteristiche meccaniche matrice epossidica

In Tab. 20 sono riportati i valori delle caratteristiche meccaniche della resina epossidica che funge da matrice per l'FRP.

6.4.3 *Caratteristiche delle fibre*

Le fibre impiegate risultano della stessa tipologia usata per le prove a taglio descritte precedentemente. I travetti sono stati rinforzati con uno strato di fibre di spessore complessivo pari a 0.165mm.

6.4.4 Setup di prova

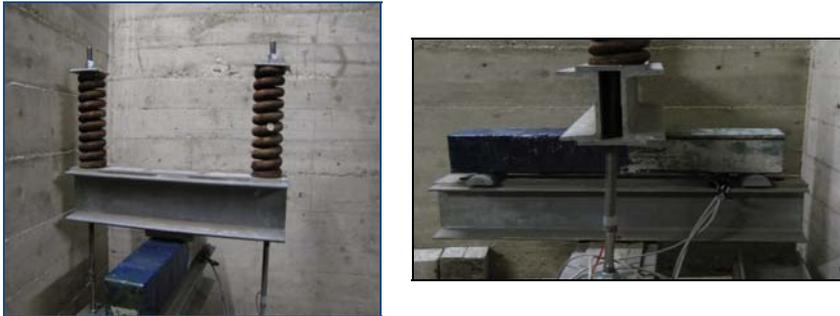


Fig. 79 Test a Flessione

I test per la determinazione degli effetti globali del rinforzo in FRP sono stati effettuati considerando una trave in semplice appoggio caricata mediante carichi concentrati simmetrici. Il carico è stato applicato a mezzo di un contrasto realizzato attraverso travi in acciaio di sezione a C caricate con molle come visibile in Fig. 80. Per ottenere un carico concentrato e un appoggio puntuale, le azioni e i vincoli sono stati realizzati mediante semi-circonferenze in acciaio collegate alla macchina di prova come rappresentato in Fig. 82.

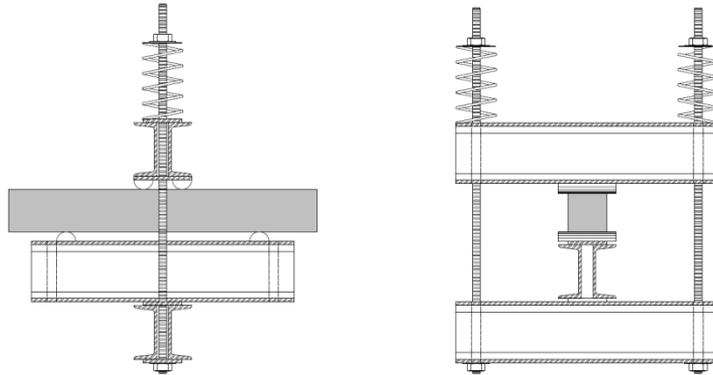


Fig. 80 Setup prova a flessione

I contrasti di lunghezza $L = 680\text{mm}$ sono stati realizzati con due sezioni a C 140 laminate a caldo collegate mediante saldatura con due piastre di spessore 10mm e larghezza 100mm per tutta la lunghezza del traverso (Fig. 81).

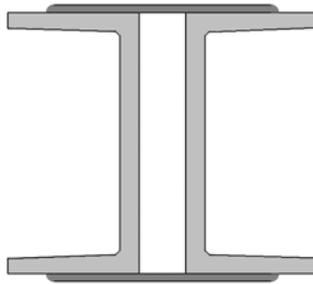


Fig. 81 Sezione trasversale del contrasto

6.4.4.1 Preparazione dei provini

La sperimentazione verte su travetti in semplice appoggio di dimensioni $100 \times 100 \times 600$ mm rinforzati da uno strato di fibre di carbonio monodirezionali, caricati con due carichi concentrati posti simmetricamente ad una distanza di 50 mm dall'asse di simmetria della trave, Fig. 82.

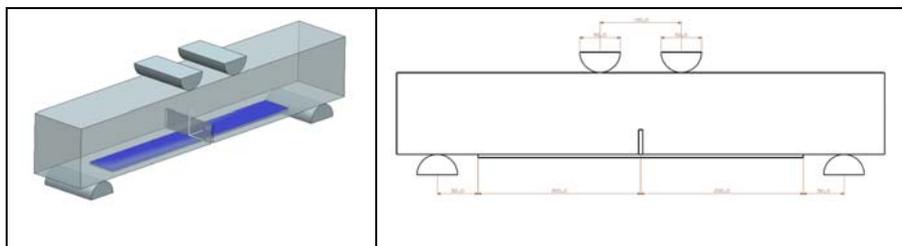


Fig. 82 Schema travetto di prova

La sezione dei travetti è stata indebolita in mezzeria realizzando una fessura di altezza pari a 30 mm (v. Fig. 83) per aumentare gli effetti sul rinforzo (viene simulata la condizione di trave fessurata, dove l'unica resistenza a trazione della struttura che impedisce il collasso risulta essere il collegamento con le fibre).

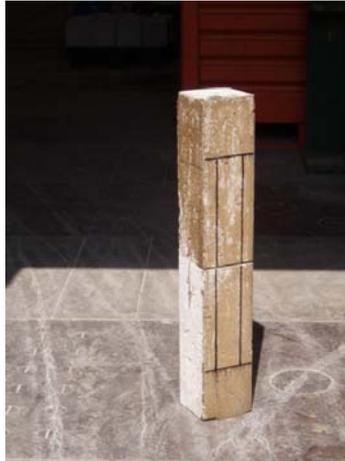


Fig. 83 Travetto in cls

La superficie di incollaggio è stata realizzata attraverso una levigatura superficiale con asperità medie stimate di 0.5mm.



Fig. 84 Incollaggio fibre

In Fig. 84 è mostrata la fase di incollaggio delle fibre monodirezionali sul provino di calcestruzzo.

Affinché la matrice polimerica avvolgesse completamente le fibre di carbonio, si è effettuata la procedura di rullatura, e successivamente si è steso un secondo strato di resina per ricoprire il tutto. Lo spessore finale medio della resina a polimerizzazione avvenuta è risultato di circa 2mm.

Le deformazioni di interfaccia misurate nel tempo sono state determinate attraverso l'incollaggio di estensimetri monoassiali "*strain gauges*" in corrispondenza della fascia di FRP come mostrato nello schema in Fig. 85.

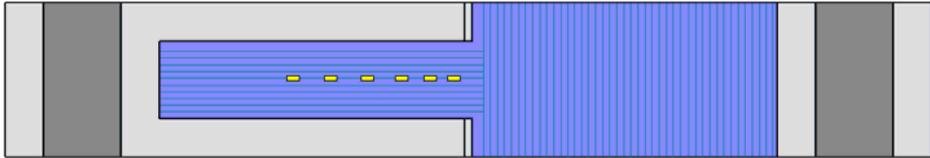


Fig. 85 Schema incollaggio estensimetri

Per imporre che il massimo effetto sull'interfaccia avvenisse nella zona strumentata, si è preferito disporre la fibra parallelamente al travetto su metà trave, disponendo nell'altra metà uno strato aggiuntivo di fibre perpendicolari v. Fig. 85 in modo da ridurre le deformazioni, ed impedire l'eventuale delaminazione nella zona in cui gli strumenti di misura non erano stati collocati.

6.4.4.2 *Barre di Carico*

La messa in carico dei provini è stata effettuata mediante due contrasti (uno superiore e uno inferiore) collegati mediante due *barre di carico* in acciaio messe in tiro con opportune molle. Il controllo della forza applicata alle barre di carico ha permesso di valutare esattamente la forza totale applicata al provino anche in presenza di deformabilità della macchina di prova.

La determinazione del carico nelle barre è avvenuta mediante un controllo di deformabilità delle stesse. Esse infatti sono state strumentate con estensimetri monodirezionali che ne controllavano le deformazioni assiale.

Come si può vedere in Fig. 80 essendo le barre caricate assialmente, nota la sezione dell'asta, il modulo elastico del materiale e la deformazione, è stato possibile risalire alla forza applicata mediante la teoria elastica lineare:

$$F = \varepsilon EA \quad (6.8)$$

essendo ε la deformazione assiale letta, E il modulo elastico della barra e A la sezione.



Fig. 86 Barra di carico strumentata

Per escludere irregolarità della sezione, come visibile in Fig. 86 la barra di carico è stata indebolita, andando a definire una zona di sezione costante in cui è stato applicato l'estensimetro. Il diametro D e l'area A delle due barre denominate tr_1 e tr_2 sono state riportate in Tab. 21.

Sample	$D(tr_1)$ [mm]	A_1 [mm ²]	$D(tr_2)$ [mm]	A_2 [mm ²]
1	19.54	299.87	19.88	310.40
2	19.24	290.74	19.45	297.12
3	14.15	157.25	14.56	166.50
4	14.60	167.42	14.5	165.13

Tab. 21 Caratteristiche geometriche delle barre di carico



Fig. 87 Determinazione del modulo elastico delle barre di carico

La determinazione del modulo elastico di ogni barra è stata effettuata mediante una prova a trazione (Fig. 87). Il test consiste nel tendere le barre con una forza di 10kN andando a leggerne le deformazioni nell'estensimetro. Nota la sezione della barra si è ricavato lo stato tensionale e quindi il modulo elastico. I valori ottenuti sono stati riassunti in Tab. 22.

sample	tr	A [mm ²]	F [N]	σ [MPa]	ε [$\mu\text{m}/\text{m}$]	E [MPa]
1	1	299.87	10000	33.35	196	170139.4
	2	310.40	10000	32.22	162	198866.8
2	1	290.74	10000	34.40	145	237209.4
	2	297.12	10000	33.66	160	210354.1

3	1	157.25	10000	63.59	240	264963.5
	2	166.50	10000	60.06	255	235530.5
4	1	167.42	10000	59.73	310	192682.7
	2	165.13	10000	60.56	300	201861.2

Tab. 22 Determinazione del modulo elastico E delle barre di carico

6.4.5 Compensazioni di misura

Le misure effettuate sui campioni sono essenzialmente dipendenti da due fattori esterni ambientali: variazioni giornaliere e stagionali di umidità e temperatura.

Le variazioni termiche sono state trattate mediante opportune tecniche di compensazione (Hoffmann, 1989) in fase di “lettura dati” (la tecnica è stata descritta nel Box 12), mentre la variazione di umidità ha comportato un’oscillazione delle grandezze misurate come visibile in (Fig. 88).

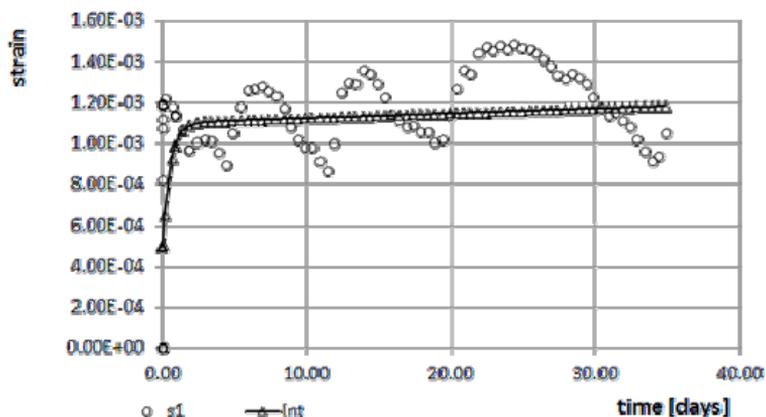


Fig. 88 Oscillazione sulla misura di deformazione a causa delle variazioni di umidità ambientali

Questo fenomeno già studiato in (Bazant & Wang, 1985, 247-252) può essere risolto filtrando i dati, cioè andando a considerare dei valori medi rispetto alle oscillazioni dei dati.

La compensazione termica può avvenire mediante l'impiego di un secondo estensimetro denominato "estensimetro di compensazione" (Hoffmann, 1989).

L'estensimetro di compensazione deve essere applicato ad un punto dell'oggetto non sollecitato meccanicamente e deve subire le stesse variazioni di temperatura a livello di tempo e di grado, dell'estensimetro misurante.

Deve essere anche abbastanza rigido da non oscillare in caso di scosse, per evitare errori di misurazione.

La capacità termica dell'elemento di compensazione dovrebbe essere bassa così che la sua temperatura segua velocemente le variazioni di quella dell'oggetto, infatti solo raggiunto l'equilibrio della temperatura la compensazione risulterà di nuovo completa.

Per effettuare questa procedura si è applicato l'estensimetro ad un elemento di FRP esterno al provino in contatto termico con l'ambiente. L'elemento di FRP è risultato sufficientemente piccolo in modo che l'equilibrio termico nell'estensimetro di compensazione avvenisse sempre prima degli estensimetri di misura applicati nel provino.

Si ottiene quindi:

$$\mathcal{E} = \underbrace{\mathcal{E}_{mech} + \mathcal{E}_{ther}}_{\varepsilon_1} - \underbrace{\mathcal{E}_{ther}}_{\varepsilon_2} = \mathcal{E}_{mech}$$

dove ε_1 , ε_2 sono le deformazioni lette nell'estensimetro (1) di misura e (2) quello di compensazione

Box 12 Compensazione Termica

6.4.6 Misure di creep

Per ogni provino sono stati riportati i valori di carico applicato, nonché le misure di deformazioni nel tempo per ogni estensimetro del provino.

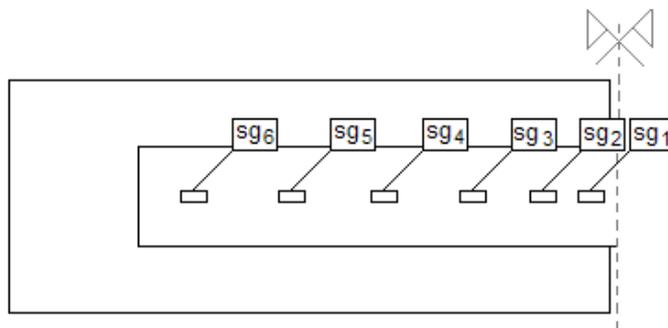


Fig. 89 Denominazione degli estensimetri nei provini

Ogni estensimetro è stato siglato con il codice sg_i (con $i=1-6$); le relative posizioni sono visibili in Fig. 89.

A causa della diversa rigidità delle molle, e della diversa sezione e modulo elastico delle barre di carico, queste ultime sono state caricate con valori di carico differenti. Ma grazie al traverso rigido di testa, il

provino si può comunque assumere caricato con un carico concentrato pari alla somma dei carichi agenti nelle due barre.

6.4.6.1 Provino 1

L'andamento delle deformazioni nel tempo delle barre di carico è riportato in Fig. 90

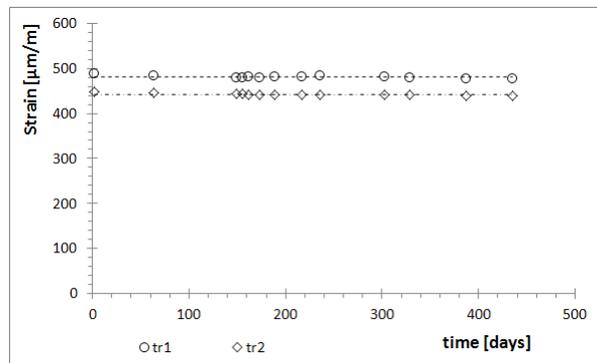


Fig. 90 Deformazioni delle barre di carico nel tempo, provino 1

Lo stato deformativo risulta quindi costante nel tempo, e la forza assiale F associata ad ogni barra è riportata in Tab. 23.

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

Provino	tr	A [mm ²]	E [MPa]	ε [μm/m]	σ [MPa]	F [kN]
1	1	299.87	170139.4	481.24	81.88	24.55
	2	310.40	198866.8	442.2	87.94	27.30

Tab. 23 Forza trasmessa dalle barre di carico

La forza totale risulta quindi di $F_{tot} = F(tr_1) + F(tr_2) = 51.85\text{kN}$ ed è applicata mediante due carichi concentrati F_0 (Fig. 82), ciascuno pari a $F_0 = 25.92\text{kN}$. Le deformazioni associate a questo carico applicato sono visibili in Fig. 91.

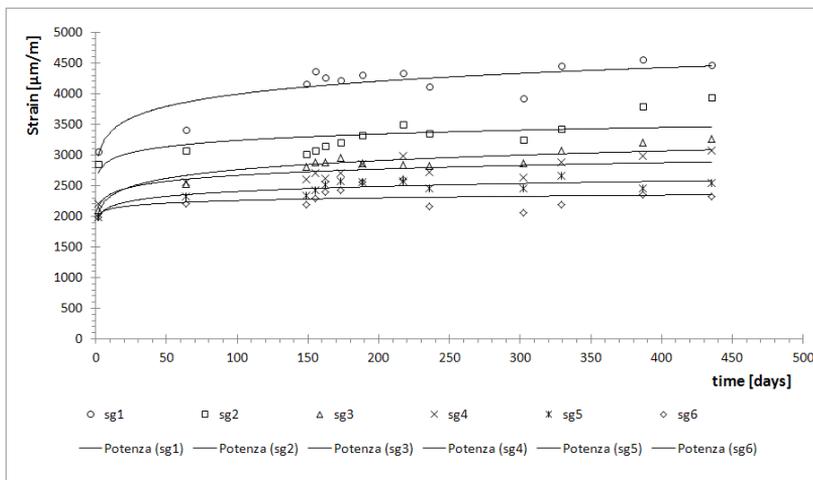


Fig. 91 Variazione di deformazione nel tempo su 6 estensimetri nel provino 1.

6.4.6.2 Provino 2

L'andamento delle deformazioni nel tempo delle barre di carico è riportato in Fig. 92.

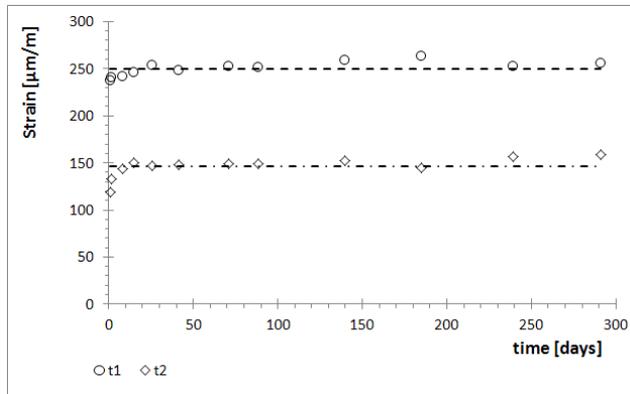


Fig. 92 Deformazioni delle barre di carico nel tempo, provino 2

Lo stato deformativo risulta quindi costante nel tempo, e la forza assiale F associata ad ogni barra è riportata in Tab. 24.

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

Provino	tr	A [mm ²]	E [MPa]	ϵ [$\mu\text{m}/\text{m}$]	σ [MPa]	F [kN]
2	1	290.74	237209.4	250.17	59.34	17.25
	2	297.12	210354.1	145.97	30.71	9.12

Tab. 24 Forza trasmessa dalle barre di carico

La forza totale applicata risulta quindi di $F_{\text{tot}} = F(\text{tr}_1) + F(\text{tr}_2) = 26.38\text{kN}$ ed è applicata mediante due carichi concentrati F_0 (Fig. 82), che risultano pari a $F_0 = 13.19\text{kN}$.

Le deformazioni associate a questo carico sono visibili in Fig. 93.

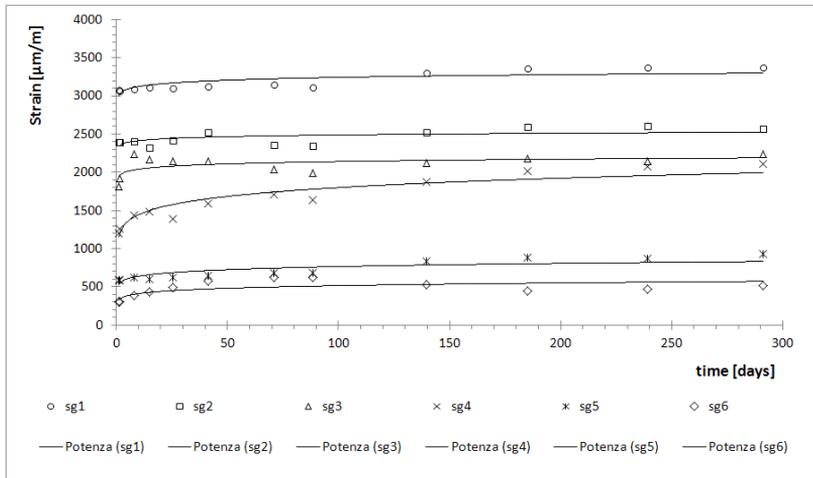


Fig. 93 Variazione di deformazione nel tempo su 6 estensimetri nel provino 2.

6.4.6.3 Provino 3

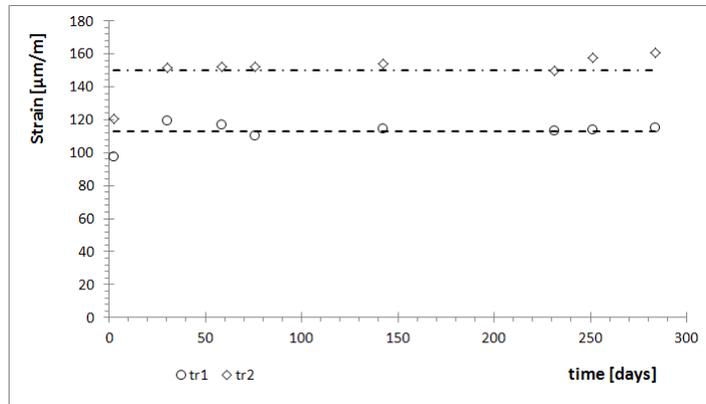


Fig. 94 Deformazioni delle barre di carico nel tempo, provino 3

Lo stato deformativo risulta quindi costante nel tempo, e la forza assiale F associata ad ogni barra è riportata in Tab. 25.

Provino	tr	A [mm ²]	E [MPa]	ϵ [μm/m]	σ [MPa]	F [kN]
3	1	157.25	264963.5	112.71	29.86	4.70
	2	166.50	235530.5	149.81	35.28	5.87

Tab. 25 Forza trasmessa dalle barre di carico

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

La forza totale applicata risulta quindi di $F_{tot} = F(tr_1) + F(tr_2) = 10.57kN$ applicata mediante due carichi concentrati F_0 (Fig. 82), che risultano pari a $F_0 = 5.29kN$.

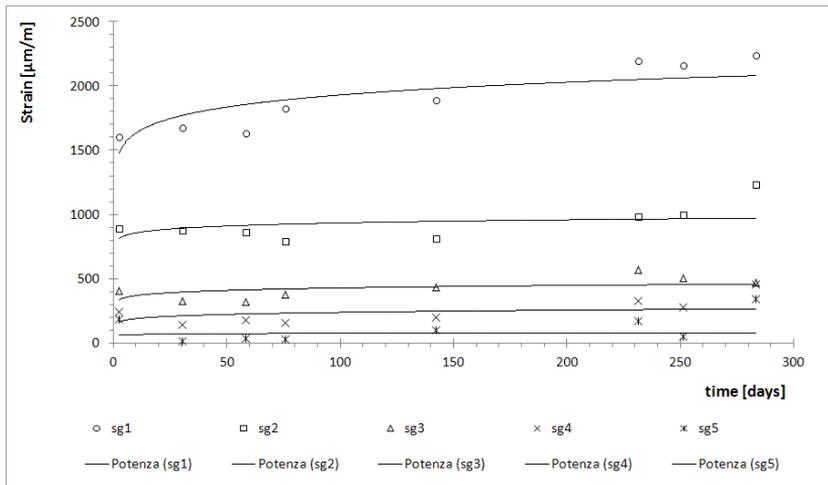


Fig. 95 Variazione di deformazione nel tempo su 5 estensimetri nel provino 3.

6.4.6.4 Provino 4

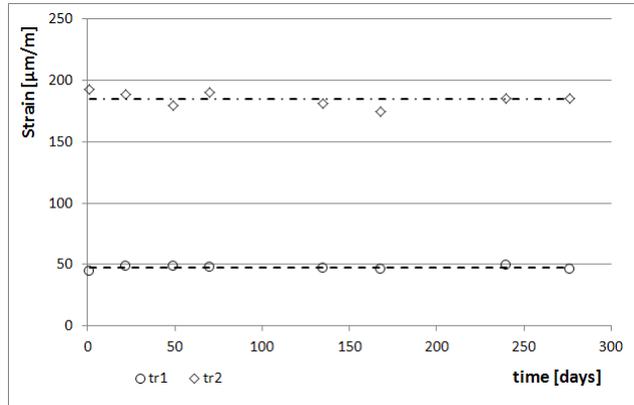


Fig. 96 Deformazioni delle barre di carico nel tempo, provino 4

Lo stato deformativo è costante nel tempo, e la forza assiale F associata ad ogni barra è riportata in Tab. 26.

Provino	tr	A [mm ²]	E [MPa]	ϵ [$\mu\text{m/m}$]	σ [MPa]	F [kN]
4	1	167.42	192682.7	47.25	9.10	1.52
	2	165.13	201861.2	184.66	37.28	6.16

Tab. 26 Forza trasmessa dalle barre di carico

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

La forza totale risulta quindi di $F_{tot} = F(tr_1) + F(tr_2) = 7.68\text{kN}$ ed è applicata mediante due carichi concentrati F_0 (Fig. 82), pari a $F_0 = 3.84\text{kN}$.

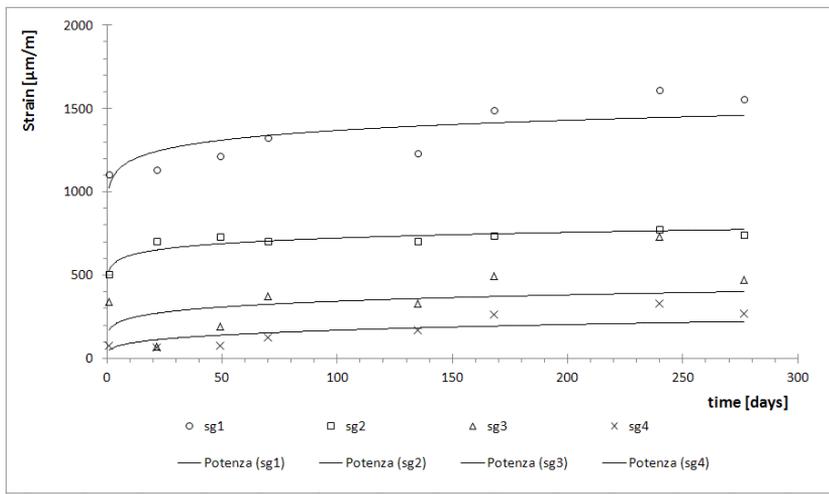


Fig. 97 Variazione di deformazione nel tempo su 4 estensimetri nel provino 4.

7 IMPLEMENTAZIONE NUMERICA

7.1 Introduzione

Il codice è stato realizzato attraverso una pseudo programmazione ad oggetti. Pseudo in quanto Fortran 90 non possiede una vera e propria programmazione OOP (object-oriented programming). Il linguaggio permette la creazione di classi denominate “*moduli*”, che in questo lavoro verranno chiamati indifferentemente classi o moduli. Normalmente una classe è composta da una o più variabili di “*tipo derivato*” cioè un insieme di variabili base (*real, integer, character, logical*) o di variabili anch’esse derivate con il compito di descrivere le caratteristiche della classe nonché da funzioni (nello specifico *subroutine* e/o *function*) con il compito di controllare il comportamento delle variabili definite inizialmente.

È quindi possibile in questo modo realizzare parti di codice completamente indipendenti che caratterizzano un particolare oggetto (per la programmazione di codici FEM un oggetto potrebbe essere un elemento finito, o i nodi della mesh, i materiali...) e connetterli successivamente per farli lavorare assieme, e ottenere il risultato voluto.

Il codice sviluppato contiene le classi riportate in TAB:

<i>cGlobal</i>	<i>cBrick20TIM</i>	<i>cViscoB3</i>	<i>linearSolver_CRS</i>
<i>cMatrix</i>	<i>cTet4</i>	<i>cViscoFRP</i>	<i>nonlinearStatic</i>
<i>cCRS</i>	<i>cLoad</i>	<i>cStep</i>	<i>GaussElimination</i>
<i>openClose</i>	<i>cConcLoad</i>	<i>solver</i>	<i>sparseSolver</i>
<i>logo</i>	<i>cCotact</i>	<i>cSolverCond</i>	<i>cSet</i>
<i>readInputFile</i>	<i>cMaterial</i>	<i>assembly</i>	<i>plotSet</i>
<i>cNode</i>	<i>cElasticIso</i>	<i>cBoundary</i>	<i>GiD</i>
<i>cNodeRes</i>	<i>cElasticOrt</i>	<i>cPenaltyBoundary</i>	<i>cGMsh</i>
<i>cEmelent</i>	<i>cViscoElastic</i>	<i>linearSolver</i>	

Tab. 27 Moduli e Funzioni principali del codice

Verranno qui descritte brevemente tutte le classi componenti il codice, in cui verrà spiegato il funzionamento base delle funzioni realizzate ad esse associate.

Nel capitolo sono stati ancora riportati alcuni test effettuati per la verifica degli algoritmi scritti, nonché alcune parti del codice stesso.

7.2 cGlobal

È la classe che controlla le variabili globali.

In cGlobal sono definite le costanti globali del codice non modificabili dall'utente:

dimSpace dimensione dello spazio attualmente posto con valore pari a 3 (x uno spazio geometrico tridimensionale).

dimDof è una costante aggiuntiva nel caso si volessero aumentare i gradi di libertà "g.d.l." (ad esempio considerando nuove variabili quali la temperatura,...).

totDof è il numero totale di g.d.l. definito come $dimSpace + dimDof$.

ONE è una variabile di valore unitario che serve per l'allocazione dei puntatori.

La classe definisce un tipo derivato di base utilizzato poi in tutto il codice denominato tComponent (v. Box 13):

```
type tComponent
  integer          :: index
  real*8,dimension(dimSpace) :: dir
end type tComponent
```

Box 13 Variabile derivata tComponent

Questa variabile derivata rappresenta i valori delle componenti di un vettore rappresentato in uno spazio di dimensioni *dimSpace*.

La classe è composta dalle seguenti funzioni:

- tComponent_ è il costruttore della variabile tComponent per l'inizializzazione delle sottovariabili.
- Distance restituisce la distanza tra due punti *point1* e *point2* definiti come tComponent.
- unitVector trova il vettore con modulo unitario parallelo al vettore *vector* definito in chiamata, ti tipo tComponent.
- plotComponent funzione per la stampa delle componenti del vettore *vector* nell'unità *unit*. La vettore può essere associato un nome assegnato con il character *name*.

- openFile funzione che apre un file associato all'unità *unit* di nome *fileName*.
- deallocateFile cancella tutto il contenuto del file aperto nell'unità *unit* con nome *nameFile*.
- addTComponentPointer incrementa di un valore il vettore di puntatori *point* di tipo *tComponent* inizializzando la nuova posizione.
- addIntPointer incrementa di un valore il vettore di puntatori *integerPointer* di tipo *integer*, assegnando alla nuova posizione il valore *value*.
- addRealPointer incrementa di un valore il vettore di puntatori *realPointer* di tipo *real*8*, assegnando alla nuova posizione il valore *value*.
- plotIntMat stampa una matrice di interi *mat* di dimensione (n×m) con n ed m generici nell'unità *unit*.
- plotRealMat stampa una matrice di reali in doppia precisione *mat* di dimensione (nxm) con n ed m generici nell'unità *unit*.

cGlobal è riportata interamente in Appendice.

7.3 cMatrix

Questa classe effettua alcune semplici operazioni di base sulle matrici quali:

- vecExternalProd calcola il prodotto esterno di 2 vettori *vec1* e *vec2* definiti di tipo *tComponent*.
- vectorModule calcola il modulo di un vettore *vec* di tipo *tComponent*.

Richiama al suo interno la classe *cGlobal* per la definizione dei tipi derivati *tComponent*.

7.4 cNode

La definizione dei nodi viene realizzata attraverso la classe *cNode*. Per il suo funzionamento sfrutta le classi *cGlobal*, *cBoundary*, *cLoad*, *cNodeRes* necessarie per definire tutte le caratteristiche nodali.

La componente principale di questa classe è la definizione della variabile derivata *tNode* v. Box 14 che ha il compito di rappresentare all'interno del codice un nodo e tutte le sue caratteristiche.

```

type, public :: tNode
    integer                                :: index
    type(tComponent)                       :: coord
    type(tLoad) ,    dimension(:),    pointer    :: load
    type(tRestraining),    dimension(:),    pointer    :: restrain
    type(tInitial),    dimension(:),    pointer    :: initial
    type(tNodeRes),    dimension(:),    pointer    :: res
end type tNode

```

Box 14 Definizione della variabile tNode

Dove *index* rappresenta l'indice del nodo della mesh; *coord* sono le coordinate spaziali definite come *tComponent*; *load* puntatore di tipo *tLoad* di dimensione unitaria "ONE" nel caso in cui il nodo sia caricato; *restrain* puntatore di tipo *tRestraining* per la definizione delle condizioni al contorno, che assume valore 1 nel caso in cui il nodo venga vincolato; *initial* puntatore di tipo *tInitial* per il controllo delle condizioni iniziali (attualmente non supportato); *res* puntatore di tipo *tNodeRes* per il salvataggio dei risultati nodali.

Nel *main* del programma viene definito un vettore di tipo *tNode* con il compito di individuare la nuvola di punti che definisce il modello.

Le funzioni della classe cNode sono:

- tNode costruttore della variabile tNode.
- readInputLoad legge da input le condizioni di carico nodali.
- readInputBoundary legge da input le condizioni al contorno nodali.
- newNodeRes inizializza il puntatore della variabile *res* in tNode per l'assegnazione dei risultati nodali.
- newRestraining inizializza il puntatore della variabile *restrain* in tNode per l'assegnazione delle condizioni al contorno.
- setRestraining associa al nodo *node* la condizione al contorno *restrain* di tipo tRestraining.
- getFixRestraining restituisce la condizione di vincolo della variabile *restrain* rispetto al g.d.l. numero *nDof*. Restituisce 0 se il g.d.l. è libero o 1 se il g.d.l. è vincolato.
- getValueRestraining restituisce il valore di spostamento impresso nella variabile *restrain* rispetto al g.d.l. numero *nDof*.
- newInitial inizializza il puntatore della variabile *initial* in tNode per l'assegnazione delle condizioni iniziali.
- getValueInitial restituisce il valore della condizione iniziale *initialCondition* per il g.d.l. *nDof*.

- findNode ricerca il nodo *indexNode* nel vettore dei nodi *nodes*.
- findPositionNode potrebbe succedere che la posizione di un nodo nel vettore dei nodi *nodes* non coincida con l'indice del nodo stesso. Un caso classico avviene quando la mesh non ha una numerazione sequenziale dei nodi ma ha dei "salti". Questa funzione stabilito il numero di nodo *indexNode* ricerca la sua posizione all'interno del vettore *nodes*.
- GetComponentLoad definita la posizione di un nodo *position* all'interno del vettore *nodes*, ne restituisce la componente *dof* del carico associato.
- getNodeResult restituisce la componente di spostamento *indexDof*, del nodo nella posizione *indexPosition* del vettore *nodes*.
- orderNodeVector ordina in modo crescente il vettore dei nodi *nodes* rispetto agli indici dei nodi.
- deleteAllLoad cancella tutti i carichi precedentemente associati al vettore dei nodi *nodes*.
- getNumbersRestrained restituisce il numero totale di condizioni di vincolo bloccate nel nodo *node*.
- deleteAllNodesRes dealloca la variabile *res* a tutti i nodi del vettore *nodes* cancellando in questo modo tutti i risultati nodali.

7.5 cNodeRes

Definisce la variabile *res* in tNode. Questa classe richiama il modulo cGlobal e contiene solo il costruttore tNodeRes_ della variabile derivata tNodeRes. È un contenitore per inserire i risultati nodali del modello.

7.6 cElement

è la classe “*madre*” degli elementi, con il compito di collegare tutte le tipologie di elementi finiti implementati nel codice nelle varie parti del programma. Attualmente sono stati implementati due elementi finiti: un brick a 20 nodi isoparametrico, e l'elemento tetraedrico a 4 nodi. Questa classe è stata pensata per gestire un numero indefinito di elementi che potranno essere aggiunti in futuro. Questa classe permette ancora di gestire modelli realizzati con elementi finiti diversi contemporaneamente.

Questa classe è formata da due variabili derivate: *tResElem* che gestisce i risultati calcolati nei punti Gauss degli elementi, e *tElement* che gestisce gli elementi.

```

type tElement
  integer                                :: elementType
  type(tBrick20TIM), dimension(:), pointer :: brick20TIM
  type(tTet4),      dimension(:), pointer  :: tet4
  type(tResElem),  dimension(:), pointer  :: res
end type tElement
!---
type tResElem
  real*8, dimension(6)                    :: strain
  real*8, dimension(6)                    :: stress
end type tResElem

```

Box 15 Variabile derivata tElement

Nel Box 15 possiamo vedere la dichiarazione delle variabili derivate realizzate. Le sottovariabili *stress* e *strain* in *tResElem* hanno dimensione fissa pari a 6 considerando la rappresentazione vettoriale del tensore delle tensioni e delle deformazioni.

Ogni elemento finito letto da input verrà inserito in un vettore di tipo *tElement*, e a seconda della tipologia di elemento verrà assegnata un'allocazione di memoria corrispondente, questo può essere ottenuto

considerando le variabili specifiche per ogni elemento supportato (in questo caso tBrick20TIM o tTet4) come vettori di puntatori. I tipi di variabile tBrick20TIM e tTet4 sono anch'esse di tipo derivato definite nelle loro classi specifiche cBrick20TIM e cTet4, che verranno spiegate nei paragrafi successivi.

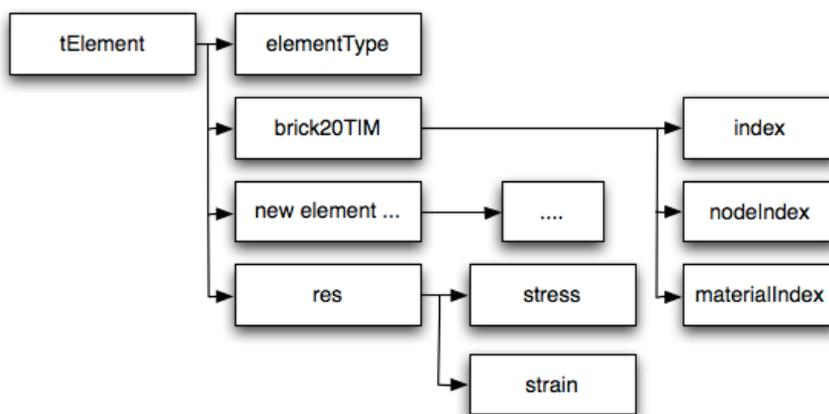


Fig. 98 Diagramma di flusso di `tElement`

In Fig. 98 è possibile vedere le componenti della variabile derivata `tElement` in cui la cella “new element ...” sono le possibili future implementazioni.

Anche la sottovariabile “res” di tipo `tResElem` è dichiarata come puntatore. In questo modo l’assegnazione dello spazio di memoria può

essere fatto solo al momento del calcolo dei risultati, e successivamente quando questi non serviranno più la memoria potrà essere deallocata recuperando spazio per altre operazioni.

La classe è composta dalle seguenti funzioni:

- tElement variabile derivata per la definizione generale di un elemento finito.
- tResElem variabile derivata per il controllo dei risultati di ogni elemento.
- tElement costruttore del tipo tElement.
- rResElem costruttore del tipo tResElem.
- newElement definisce la tipologia di elemento e lo inizializza. La tipologia di elemento viene definita attraverso l'intero elementType.
- newResElem viene allocata la sottovariabile *res* di tElement.
- deleteResElem viene deallocata la sottovariabile *res* di tElement.
- readInputElement controlla la lettura dell'elemento da input.
- stiffnessElement richiama le funzioni specifiche per l'elemento corrente *element* per la creazione della matrice di rigidezza dell'elemento.

- getIndexNodeElement per l'elemento *element*, ritorna il numero di nodi con indice *nodeNumber* (variabile intera che può assumere valori con intervallo da 1 al numero totale di nodi dell'elemento corrente).
- getTotNodesElement torna il numero totale di nodi per l'elemento *element*.
- getGauss a seconda del tipo di elemento finito *eType*, ritornano le coordinate del punto Gauss numero *g* nel formato tComponent.
- getSf per l'elemento di tipo *elementType* torna il valore della funzione di forma *numberSf* calcolata nel punto *point* (passato rispetto il s.d.r. apparente).
- findStrain calcola le deformazioni per tutto il vettore di elementi *elements* attraverso gli spostamenti salvati nel vettore *nodes*.
- getResElem ritorna il valore di stress o strain (regolato dal character *typeRes* che può assumere valore pari a 'strain' o 'stress') dell'elemento *element*, nel punto Gauss *gauss* e per la direzione *dir*.
- setResElem salva il valore di stress o strain (regolato dal character *typeRes* che può assumere valore pari a 'strain' o 'stress') dell'elemento *element*, nel punto Gauss *gauss* e per la direzione *dir*.

- findStress funzione che definisce stress su tutti gli elementi della mesh.
- findStressStrain funzione simile a findStress ma definisce deformazioni e tensioni su tutti gli elementi della mesh.
- getElementIndex ritorna il numero di elemento *element*.
- getTotGaussElement definisce il numero totale di punti Gauss per l'elemento *element*.
- getIndexElementMaterial restituisce il tipo di materiale assegnato all'elemento *element*, attraverso il valore integer che caratterizza il tipo di materiale.
- jacobElement definisce l'inversa della matrice Jacobiana e il determinante della matrice a seconda del tipo di elemento passato con *element*.
- deleteAllElementRes funzione che dealloca tutte le sottovariabili *res* di *tElement* presenti nel vettore che contiene tutti gli elementi della mesh *elements*.
- findInternalLoad calcola le forze interne nodali, e le salva nel vettore *totFint*.

7.7 cBrick20TIM

È la classe che descrive il comportamento dell'elemento finito realizzato un brick a 20 nodi con 27 punti Gauss e funzioni di forma (f.d.f.) quadratiche (Zienkiewicz & Taylor, 2000, Fish & Belytschko, 2008).

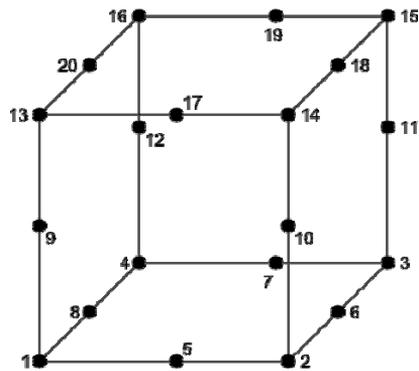


Fig. 99 Incidenza dei nodi nell'elemento finito implementato

L'incidenza dei nodi nel brick può essere vista in Fig. 99, la numerazione viene fatta, seguendo un andamento antiorario, per piani partendo dal più basso, considerando prima i nodi di spigolo e poi quelli interni. I punti Gauss seguono la stessa regola dei nodi cioè: per ogni piano l'ordine è

punti Gauss di spigolo quelli interni e il nono Gauss centrale come può essere visto in Fig. 100.

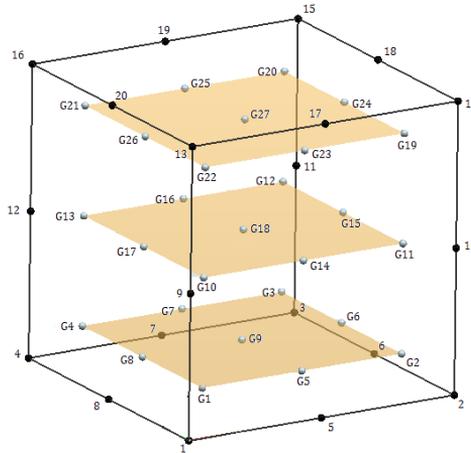


Fig. 100 Ordinamento punti Gauss

Considerando un sistema di riferimento locale dell'elemento unitario (ξ, η, ζ) , centrato nel baricentro dell'elemento stesso in modo che le coordinate del nodo 1 siano $(-1.0, -1.0, -1.0)$ e quelle del nodo 15 $(1.0, 1.0, 1.0)$, (v. Fig. 99), possiamo definire una nuova serie di coordinate (ξ_0, η_0, ζ_0) definite come:

$$\xi_0 = \xi \xi_i ; \eta_0 = \eta \eta_i ; \zeta_0 = \zeta \zeta_i \quad (7.1)$$

In cui i termini con il pedice (i) sono le coordinate locali dei nodi i-esimo, mentre il valore senza indice è la coordinata rappresentata nel s.d.r. locale del punto in cui viene calcolata la f.d.f.

Le equazioni delle f.d.f. risultano quindi:

negli spigoli

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \quad (7.2)$$

mentre nei nodi interni

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad (7.3)$$

Nella classe sono definite 2 costanti che definiscono il numero di nodi e di punti Gauss dell'elemento:

totNodesBrick20TIM = 20 definisce il numero di nodi

totGaussPointBrick20TIM = 27 definisce il numero di punti Gauss.

Le coordinate dei 27 punti Gauss sono riportati in Tab. 28:

Gauss	ξ	η	ζ
1	-0.7746	-0.7746	-0.7746
2	0.7746	-0.7746	-0.7746
3	0.7746	0.7746	-0.7746
4	-0.7746	0.7746	-0.7746
5	0.0000	-0.7746	-0.7746
6	0.7746	0.0000	-0.7746
7	0.0000	0.774597	-0.7746
8	-0.7746	0.0000	-0.7746
9	0.0000	0.0000	-0.7746
10	-0.7746	-0.7746	0.0000
11	0.7746	-0.7746	0.0000
12	0.7746	0.7746	0.0000
13	-0.7746	0.7746	0.0000
14	0.0000	-0.7746	0.0000
15	0.7746	0.0000	0.0000
16	0.0000	0.7746	0.0000
17	-0.7746	0.0000	0.0000
18	0.0000	0.0000	0.0000

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

19	-0.7746	-0.7746	0.7746
20	0.7746	-0.7746	0.7746
21	0.7746	0.7746	0.7746
22	-0.7746	0.7746	0.7746
23	0.0000	-0.7746	0.7746
24	0.7746	0.0000	0.7746
25	0.0000	0.7746	0.7746
26	-0.7746	0.0000	0.7746
27	0.0000	0.0000	0.7746

Tab. 28 Coordinate punti Gauss

Gli elementi brick a 20 nodi qui considerati, supportano tutte le leggi costitutive implementate nel codice. Possono essere impiegati quindi per analisi incrementali con materiali elastici e/o ortotropi, ed analisi transitorie utilizzando le leggi costitutive viscoelastiche viste nei capitoli precedenti.

La classe è composta dalle funzioni:

- tBrick20TIM variabile derivata per la definizione dell'elemento finito a 20 nodi.
- tBrick20TIM_ costruttore della variabile tBrick20TIM.
- readInputBrick20TIM gestisce la lettura dell'elemento brick dal file di input.

- getIndexNode restituisce l'indice di nodo della mesh corrispondente ad uno dei 20 nodi dell'elemento.
- B20_sfN restituisce il valore della la funzione di forma numero *numberSf* calcolata nel punto *point*.
- B20_sf_dN restituisce il valore della derivata della funzione di forma numero *numberSf* rispetto alla direzione *direction* calcolata nel punto *point*. Dove *numberSf* integer che può andare da 1- totNodesBrick20TIM, *direction* integer che va da 1 a dimSpace (generalmente = 3), *point* è una variabile di tipo tComponent che definisce le componenti spaziali di un vettore.
- loacINode funzione che restituisce la coordinata locale (definita nell'elemento unitario) corrispondente al nodo *nNode*. Viene restituita una variabile di tipo tComponent.
- jacobBrick20TIM funzione per la determinazione del determinante dello Jacobiano e l'inversa della matrice Jacobiana di un elemento *elementBrick20TIM* nel punto *loacIPoint* (punto definito nel sistema di riferimento apparente, quello dell'elemento unitario).
- findMatB definisce la matrice **B** con le derivare delle f.d.f.
- stiffBrick20TIM calcola la matrice di rigidezza locale dell'elemento.
- getGaussBrick20TIM ritorna una variabile tComponent con le componenti delle coordinate del punto Gauss *indexGaussPoint* (rispetto al s.d.r. apparente).

- getTotGaussPointBrick20TIM restituisce il numero totale di punti Gauss dell'elemento.

7.8 cTet4

è la classe che rappresenta gli elementi tridimensionali tetraedrici a base triangolare (v. Fig. 101).

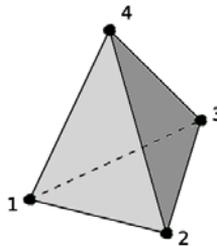


Fig. 101 Tetraedro a 4 nodi

Gli elementi in oggetto sono caratterizzati dalle seguenti caratteristiche:

- 4 nodi

- funzioni di forma lineari
- 1 o 4 punti Gauss

Il numero di punti Gauss attualmente non può essere stabilito in fase di input, ma si dovrà andare a modificare la variabile *totGaussPoint* all'interno del modulo *cTet4*. Se *totGaussPointTet* = 1 il codice assegnerà 1 punto Gauss all'elemento, mentre se *totGaussPointTet* = 4 il codice ne assegnerà 4.

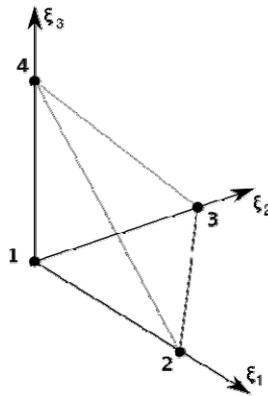


Fig. 102 Elemento unitario

L'elemento unitario di riferimento, la cui numerazione è visibile in Fig. 102 viene descritto attraverso 4 nodi di coordinate riportate in Tab. 29.

Node	ξ	η	ζ
1	0.0	0.0	0.0
2	1.0	0.0	0.0
3	0.0	1.0	0.0
4	0.0	0.0	1.0

Tab. 29 Coordinate nodali dell'elemento unitario tet4

Le funzioni di forma dell'elemento sono lineari espresse nella forma (Zienkiewicz & Taylor, 2000, Fish & Belytschko, 2008):

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta \\ N_2 = \xi \\ N_3 = \eta \\ N_4 = \zeta \end{array} \right. \quad (7.4)$$

Nel caso di 1 punto Gauss le coordinate locali risultano:

Gauss	ξ	η	ζ
1	0.25	0.25	0.25

Tab. 30 Coordinate locali 1 punto Gauss

Mentre nel caso di 4 punti Gauss le coordinate locali risultano:

Gauss	ξ	η	ζ
1	0.138196601	0.138196601	0.138196601
2	0.585410197	0.138196601	0.138196601
3	0.138196601	0.585410197	0.138196601
4	0.138196601	0.138196601	0.585410197

Tab. 31 Coordinate locali 4 punti Gauss

Generalmente i tetraedri a base triangolare sono impiegati per la realizzazione di mesh particolarmente irregolari, in quanto sono facilmente gestibili a livello geometrico. Le mesh risultano però spesso molto fitte e quindi l'impiego di un solo punto Gauss comporta un risparmio dei tempi per il calcolo sia della matrice di rigidità, che per la valutazione dello stato tensionale. Per contro un solo punto Gauss potrebbe portare ad una precisione non accettabile dei risultati su mesh meno discretizzate, in questo caso è quindi consigliabile l'utilizzo di 4 punti Gauss.

Attualmente gli elementi di contatto implementati nel codice non sono "compatibili" con questa tipologia di elemento essendo realizzati da facce triangolari a 3 nodi, mentre la classe cContact supporta al momento solo facce con quattro lati e a 8 nodi. (Esiste comunque un metodo approssimato per l'impiego dell'algoritmo di contatto sviluppato, nelle mesh realizzate con i tetraedri, trattato nel Box 16).

I tetraedri supportano tutte le leggi costitutive implementate nel codice. Possono essere impiegati quindi per analisi incrementali con materiali elastici e/o ortotropi, ed analisi transitorie utilizzando le leggi costitutive viscoelastiche viste nei capitoli precedenti.

La classe è composta dalle funzioni:

- tTet4 variabile derivata per la definizione dell'elemento tetraedro a 4 nodi
- tTet4_costruttore della variabile derivata
- readInputTet4 effettua la lettura delle incidenze da file
- getIndexNode restituisce l'indice del nodo *nNode* dell'elemento *element*.
- Tet4_sfN funzione che restituisce il valore della f.d.f numero *numberSf* calcolata nel punto *point* (la variabile *point* definita come *tComponent*).
- Tet4_sf_dN funzione che restituisce il valore della derivata rispetto la direzione *direction* della f.d.f. numero *numberSf* calcolata nel punto *point* (la variabile *point* definita come *tComponent*).
- localNode ritorna in formato *tComponent* il nodo *nNode* in coordinate locali.

- jacobTet4 definisce la matrice Jacobiana e la derivata della matrice jacobiana.
- findMatBTet4 ricava la matrice **B** con le derivate delle f.d.f.
- stiffTet4 definisce la matrice di rigidezza locale *elementStiff*.
- getIndexNodeTet4 ritorna l'indice del nodo *nNode* (numerato rispetto la numerazione locale dell'elemento) dell'elemento *element*.
- getGaussTet4 ritorna in formato *tComponent* le coordinate del punto gauss *indexGaussPoint*.
- getTotGaussTet4 ritorna il numero totali di punti gauss dell'elemento Tet4.
- integrationWeights a seconda del punto Gauss *g* ritorna il peso di integrazione.

7.8.1 Esempio (utilizzo degli elementi tetraedrici)

Un esempio realizzato è stato riprodotto in Fig. 103 Realizzato con 9649 elementi tetraedri e 2991 nodi. Il modello rappresenta un cassone di un ponte soggetto ad un carico concentrato applicato ad un estremo di un'ala, mentre le condizioni di vincolo sono di incastrato in una sezione trasversale di estremità.

È stata eseguita un'analisi transitoria andando a indagare l'effetto differito nel cassone a causa del carico applicato, avendo impiegando per il materiale una legge viscoelastica B3.

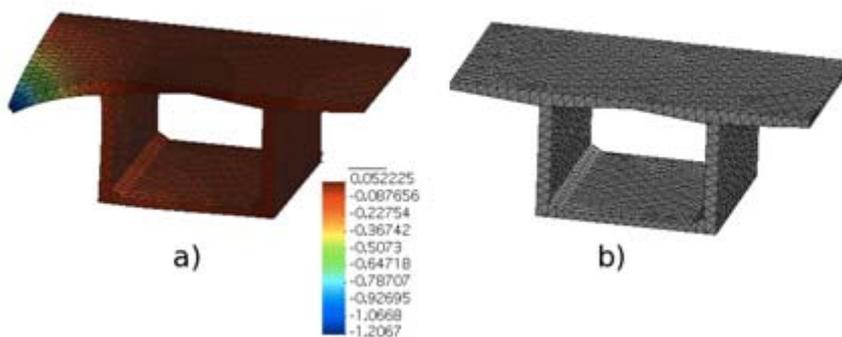


Fig. 103 a) Mesh deformata; b) Mesh indeformata

In Fig. 104 è possibile vedere la variazione di spostamento dell'ala del cassone al variare del tempo, a causa degli effetti differiti del calcestruzzo.

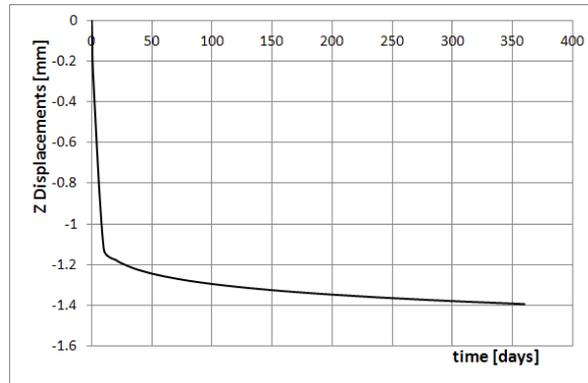


Fig. 104 Spostamento verticale dell'ala del cassone vs. tempo

È stato detto precedentemente che utilizzando questa tipologia di elementi finiti non è possibile impiegare l'algoritmo di contatto in quanto le facce dell'elemento Tet4 sono triangolari con 3 nodi mentre l'elemento finito realizzato per il contatto è una superficie che richiede 8 nodi perimetrali. È però sempre possibile individuare la superficie voluta utilizzando più elementi tetraedrici e quindi utilizzare l'algoritmo di contatto così realizzato andando a connettere gli 8 nodi individuati nella mesh come possiamo vedere in Fig. 105.

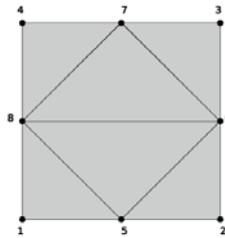


Fig. 105 Superficie realizzata con tetraedri a base triangolare associata con superfici di contatto a 8 nodi

Anche se questa configurazione permette l'utilizzo dell'algoritmo di contatto, le funzioni di forma tra gli elementi tetraedrici (lineari) non risultano compatibili con quelli degli elementi di contatto (quadratiche). Questo comporta una soluzione approssimata nelle superfici di contatto (potrebbero verificarsi delle compenetrazioni non controllate dall'algoritmo a causa del diverso modo di deformare degli elementi). Questo effetto si riduce all'aumentare dell'infittimento della mesh in quanto la deformata lineare all'aumentare della discretizzazione si avvicina ad una deformata quadratica come possiamo vedere in Fig. 106.

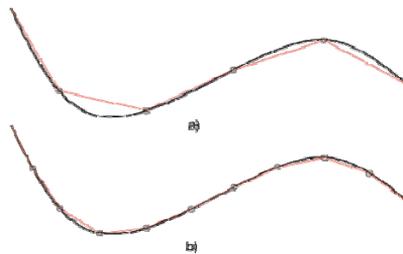


Fig. 106 a) Approssimazione con una bassa discretizzazione b) Approssimazione con una buona discretizzazione

Box 16 Contatto applicato alle facce degli elementi tetraedrici

7.9 cBoundary

Le condizioni al contorno supportate dal codice sono di tipo nodale Fig. 107, e consistono in vincoli fissi, o spostamenti impressi. La condizione di nodi vincolato avviene attraverso un “*codice di vincolo*” che può assumere il valore 0 per la componente di spostamento libera o 1 per la componente di spostamento vincolata. Alla classe cBoundary è stato anche inserito il controllo delle condizioni iniziali, presenti in molti problemi transitori, ma che attualmente non vengono utilizzate dal codice, e qui inserite solo nell’ottica di uno sviluppo futuro..

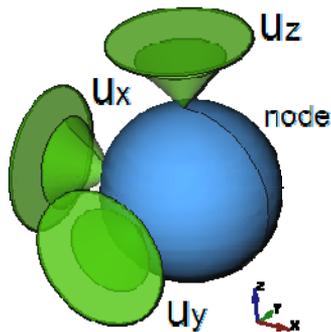


Fig. 107 Condizioni al contorno nodali

Le condizioni al contorno possono essere inserite in due modi diversi a seconda del solutore utilizzato. Impiegando per la risoluzione lo schema dell'*eliminazione di Gauss*, le condizioni al contorno che rappresentano un vincolo fisso, verranno assegnate al sistema mediante l'eliminazione delle righe e delle colonne corrispondenti alla componente di spostamento vincolata. Utilizzando lo schema del *gradiente coniugato* le condizioni al contorno possono ancora essere inserite eliminando righe e colonne, o attraverso la procedura Penalty che verrà illustrata più avanti. La procedura penalty normalmente comporta notevoli vantaggi rispetto ai tempi di creazione del sistema assemblato che dovrà essere risolto.

La classe è composta dalle funzioni:

- tRestraining variabile derivata per l'assegnazione delle condizioni di vincolo.
- tInitial variabile derivata per l'assegnazione delle condizioni iniziali (attualmente questa variabile anche se definita non viene utilizzata).
- tRestraining costruttore della variabile tRestraining
- tInitial costruttore della variabile tInitial

7.10 cMaterial

La determinazione della matrice costitutiva avviene nella classe madre cMaterial e dalle sottoclassi che definiscono i materiali implementari. Attualmente a cMaterial sono stati associate tre tipi di materiali:

1. Materiale isotropo lineare nel modulo cElasticIso
2. Materiale ortotropo nel modulo cElasticOrt
3. Materiale viscoelastico in cViscoElastic

Nella classe cViscoElastic contiene due possibili modelli di materiali viscoelastici:

1. Il modello B3 che calcola funzione di viscosità attraverso la il modello sviluppato da Bazant (Bazant & Baweja, 2000, 1-83), implementato nella sottoclasse cViscoB3.
2. Il modello micromeccanico per materiali compositi a fibre sviluppato da Ascione (Ascione & Berardi, 2006, 7-10). Lo sviluppo di questo modello è stato eseguito nella sottoclasse cViscoFRP.

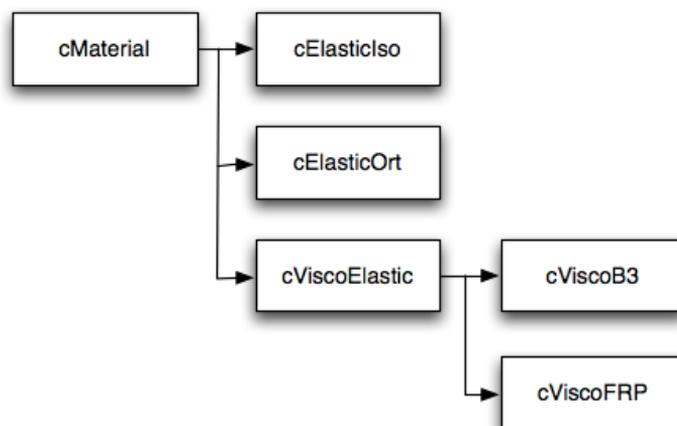


Fig. 108 Diagramma di flusso per la classe *cMaterial*.

In Fig. 108 si può vedere lo schema seguito per la progettazione della classe *cMaterial* che si avvale di sottoclassi che raggruppano tutti i modelli costitutivi implementati. *cMaterial* è quindi un contenitore che ha il compito di gestire i vari modelli costitutivi realizzati e crea il collegamento dei vari materiali con il resto del codice. Ciò ha consentito una facile e veloce implementazione di nuovi modelli costitutivi che dovranno quindi solo essere compatibili con le function di *cMaterial* riportata in Box 23(v. Appendice). Possiamo notare che la classe può essere impiegata da strutture esterne attraverso la variabile di “*tipo derivato*” *tMaterial* in cui vengono associate tutti i materiali implementati grazie a sottovariabili anch’esse di tipo derivato *tElasticIso*, *tElasticOrt*, *tViscoElastic*.

Per ridurre lo spazio di memoria occupato da questa tipologia di variabili, le sottovariabili che definiscono i materiali sono state dichiarate come “puntatori” a cui viene associata l’allocazione di memoria solo al materiale scelto, mentre agli altri puntatori saranno vuoti.

La classe è composta dalle funzioni:

- tMaterial è la variabile derivata che caratterizza tutte le tipologie di materiali implementati.
- tMaterial costruttore della variabile derivata.
- newMaterial a seconda del tipo di materiale assegnato a tMaterial questa funzione inizializza la sottovariabile corrispondente al materiale (es. nel caso in cui si assegna ad una variabile *mat* di tipo *tMaterial* la condizione: *mat%materialType=1* che coincide con la condizione di materiale elastico lineare isotropo questa funzione inizierà la variabile *mat%elasticIso*).
- readInputMat funzione per la lettura del materiale dal file di input.
- getElasticIso ritorna una variabile *tElasticIso* precedentemente assegnata a *tMaterial*.
- getElasticOrt ritorna una variabile *tElasticOrt* precedentemente assegnata a *tMaterial*.
- getViscoElastic ritorna una variabile *tViscoElastic* precedentemente assegnata a *tMaterial*.

- constitutiveMatrix definisce la matrice costitutiva a seconda del materiale attivato in *tMaterial*.
- findMaterial effettua la ricerca all'interno di un vettore di variabili *tMaterial* e ritorna una variabile di tipo *tMaterial* corrispondente all'indice del vettore cercato.
- findElementStress definisce il vettore delle tensioni in un punto Gauss di un elemento a seconda della legge costitutiva assegnata.
- getMaterial equivalente a *findMaterial*, con la possibilità di stampare la variabile *tMaterial* cercata.

7.11 cElasticIso

E' il modulo che contiene tutte le funzioni per la caratterizzazione dei materiali elastici lineari isotropi.

```

module cElasticIso
use cGlobal
implicit none

  type tElasticIso
    real*8          :: young
    real*8          :: poisson
  end type tElasticIso

contains
  !-----
  subroutine tElasticIso_(elasticIsotropicMaterial)
    implicit none
    type(tElasticIso) :: elasticIsotropicMaterial
    elasticIsotropicMaterial%young      = 0.D0
    elasticIsotropicMaterial%poisson    = 0.D0
  return
  end subroutine tElasticIso_
  !-----
  real*8 function getYoungElasticIso(elasticIsotropicMaterial)
    implicit none
    type(tElasticIso) :: elasticIsotropicMaterial

```

```

    getYoungElasticIso = elasticIsootropicMaterial%young
return
end function getYoungElasticIso
!-----
real*8 function getPoissonElasticIso(elasticIsootropicMaterial)
implicit none
type(tElasticIso) :: elasticIsootropicMaterial
    getPoissonElasticIso = elasticIsootropicMaterial%poisson
return
end function getPoissonElasticIso
!-----
subroutine constitutiveMatrixEI(unit, materialEI, matD)
implicit none
integer                                :: unit
type(tElasticIso)                       :: materialEI
real*8,dimension(:,:),pointer :: matD
real*8                                   :: value1
real*8                                   :: value2
    allocate(matD(6,6))
    value1 = materialEI%young/((1.D0+materialEI%poisson)* &
        (1.D0-2.d0*materialEI%poisson))
    value2 = value1*(1.D0-2.d0*materialEI%poisson)/2.D0
    matD = 0.D0
    matD(1,1) = (1.d0-materialEI%poisson)*value1
    matD(1,2) = value1*materialEI%poisson
    matD(1,3) = value1*materialEI%poisson
    matD(2,1) = value1*materialEI%poisson
    matD(2,2) = (1.d0-materialEI%poisson)*value1
    matD(2,3) = value1*materialEI%poisson
    matD(3,1) = value1*materialEI%poisson
    matD(3,2) = value1*materialEI%poisson

```

```

matD(3,3) = (1.d0-materialEI%poisson)*value1
matD(4,4) = value2
matD(5,5) = value2
matD(6,6) = value2

return
end subroutine constitutiveMatrixEI
!-----

subroutine stressElasticIso (unit, strain, stress, materialEI)
implicit none
integer                                :: unit
real*8,          dimension(:)          :: strain
real*8,          dimension(:)          :: stress
type(tElasticIso)                       :: materialEI
integer                                :: i,j
real*8,          dimension(:,:),       pointer :: matD
allocate(matD(size(strain),size(strain)))
call constitutiveMatrixEI(unit, materialEI, matD)
stress = 0.D0
do i = 1,size(strain)
  do j = 1,size(strain)
    stress(i) = stress(i) + matD(i,j)*strain(j)
  end do
end do
deallocate(matD)
return
end subroutine stressElasticIso
!-----
end module cElasticIso

```

Box 17 cElasticIso.f90

Il codice, grazie alla simmetria del tensore delle tensioni e delle deformazioni considera queste grandezze nel formato vettoriale. Il tensore costitutivo **D** può essere quindi rappresentato sotto forma di matrice, che nello spazio tridimensionale assume dimensione 6x6.

La classe è composta dalle funzioni:

- tElasticIso è la variabile derivata per la caratterizzazione del materiale elastico isotropo.
- tElasticIso costruttore della variabile di tipo tElasticIso.
- readInputElasticIso effettua la lettura delle caratteristiche del materiale elastico lineare isotropo dal file di input.
- getYoungElasticIso restituisce il modulo elastico del materiale.
- getPoissonElasticIso restituisce il coefficiente di Poisson del materiale.
- constitutiveMatrixEI definisce la matrice costitutiva **D** del materiale elastico lineare isotropo.
- stressElasticIso definisce il vettore delle tensioni note le deformazioni con il vettore *strain* e le caratteristiche del materiale *materialEI*.

7.11.1 Test

Si è considerato un unico elemento brick di dimensioni 1000×1000×1000mm. Sono stati realizzati 2 modelli con due materiali diversi: al primo modello è stato associato un materiale di tipo elastico lineare isotropo con modulo di Young pari a 210000MPa e coefficiente di Poisson ν pari a 0.35. Mentre al secondo modello è stato posto un coefficiente di Poisson nullo $\nu=0.0$. Le condizioni al contorno su entrambi i modelli sono di tipo isostatico su tutta la faccia inferiore dell'elemento, mentre sono stati assegnati carichi verticali nella faccia superiore.

nodes			
1	0.00E+0	0.0E+0	0.0E+0
2	1.00E+3	0.0E+0	0.0E+0
3	1.00E+3	1.0E+3	0.0E+0
4	0.00E+0	1.0E+3	0.0E+0
5	0.00E+0	0.0E+0	1.0E+3
6	1.00E+3	0.0E+0	1.0E+3
7	1.00E+3	1.0E+3	1.0E+3
8	0.00E+0	1.0E+3	1.0E+3
9	5.00E+2	0.0E+0	0.0E+0
10	0.00E+0	5.0E+2	0.0E+0
11	1.00E+3	5.0E+2	0.0E+0
12	5.00E+2	1.0E+3	0.0E+0
13	0.00E+0	0.0E+0	5.0E+2
14	1.00E+3	0.0E+0	5.0E+2
15	0.00E+0	1.0E+3	5.0E+2

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI
INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```

16      1.00E+3 1.0E+3 5.0E+2
17      5.00E+2 0.0E+0 1.0E+3
18      0.00E+0 5.0E+2 1.0E+3
19      1.00E+3 5.0E+2 1.0E+3
20      5.00E+2 1.0E+3 1.0E+3
end
element
brick20TIM
!index n1 .... n20 mat
1 1 2 3 4 9 11 12 10 13 14 16 15 5 6 7 8 17 19 20 18 1
end
material
!Isotropic material
elasticlso
!mat number      elastic modulus      poisson'sratio
1          210000.0      0.35
end
boundary
!node   code    ux      uy      uz
 1      1 1 1  0.0      0.0      0.0
 2      0 1 1  0.0      0.0      0.0
 3      0 0 1  0.0      0.0      0.0
 4      0 0 1  0.0      0.0      0.0
 9      0 0 1  0.0      0.0      0.0
10      0 0 1  0.0      0.0      0.0
11      0 0 1  0.0      0.0      0.0
12      0 0 1  0.0      0.0      0.0
end
step
time 0.1 1.0
maxIter 1000

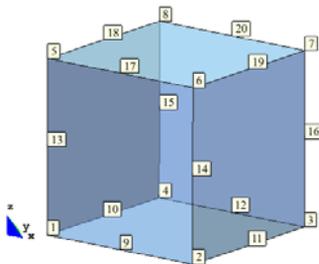
```

```

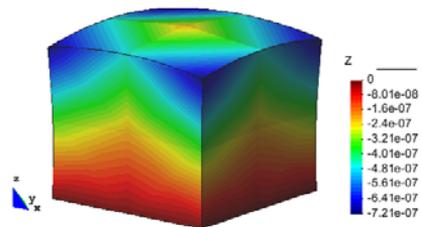
load
!node   code          Fx          Fy          Fz
5       1             0.0         0.0        -10.0
6       1             0.0         0.0        -10.0
7       1             0.0         0.0        -10.0
8       1             0.0         0.0        -10.0
17      1             0.0         0.0        -10.0
18      1             0.0         0.0        -10.0
19      1             0.0         0.0        -10.0
20      1             0.0         0.0        -10.0
end
endStep
    
```

Box 18 Input file per il test sul materiale elastico lineare "linearElasticTest.inp"

Il file di input per la realizzazione del primo modello è riportato in Box 18 in cui sono visibili sia i nodi vincolati che quelli caricati, e la direzione dei carichi. La numerazione dei nodi può essere vista in Fig. 109 a).



a)



b)

Fig. 109 a) geometria della mesh; b) mappa degli spostamenti in direzione Z.

Gli spostamenti ottenuti sono visibili in Fig. 109 b) con la deformata incrementata. Avendo caricato i nodi della faccia superiore, il carico non risulta uniformemente distribuito infatti "l'area di influenza" dei nodi di spigolo essendo minore comporta uno spostamento maggiore in corrispondenza di questi nodi, ottenendo quindi la classica forma a sella dell'elemento.

Il risultato del primo modello risulta essere influenzato dal coefficiente di Poisson diverso da zero, infatti ad esempio in direzione z la relazione stress – strain risulta essere:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] \quad (7.5)$$

La pendenza della curva $(\sigma_z, \varepsilon_z)$ Fig. 110, essendo influenzata da ν risulterà diversa da E. Nel secondo modello avendo azzerato il coefficiente di Poisson si è ottenuto un modello equivalente monodimensionale e la pendenza della curva risulta esattamente pari al modulo elastico inserito per il modello elastico lineare isotropo. I valori della pendenza della curva sono stati riportati in Tab. 32.

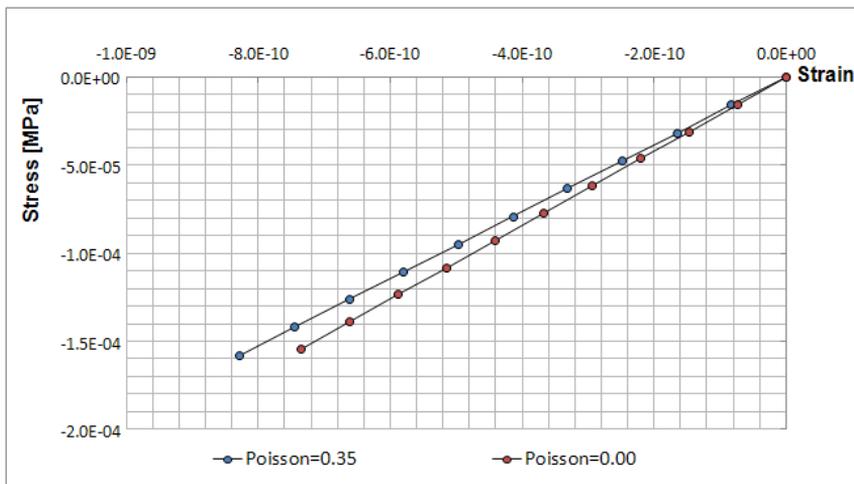


Fig. 110 Stress-Strain relation

Model	ν	σ_z/ϵ_z [MPa]
First	0.35	1.91E+05
Second	0	2.10E+05

Tab. 32 stress strain ratio

7.12 cElasticOrt

Generalmente le fibre impiegate per gli interventi di ripristino delle strutture esistenti sono di tipo monodirezionale, il cui incollaggio a strati viene eseguito variando l'inclinazione delle fibre per ottenere effetti diversi nelle varie direzioni. L'elemento di FRP è composto da fibre immerse in una matrice che si assume, dopo la fase di impregnazione, completamente aderente alle fibre stesse Fig. 111.

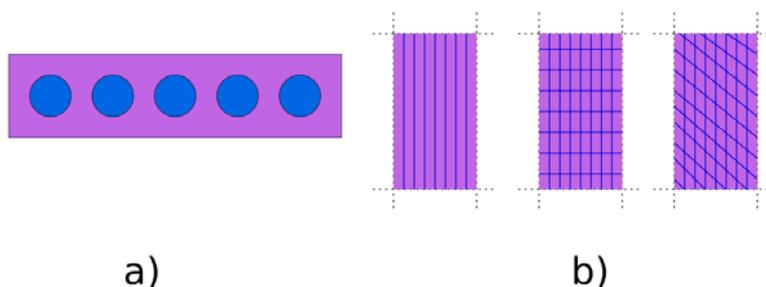


Fig. 111 a) Sezione elemento di FRP b) varie tipologie di disposizione delle fibre

L'implementazione di materiali di tipo ortotropo è dunque derivata dalla necessità di simulare realisticamente il funzionamento delle lamine di FRP e valutare, ad esempio, gli effetti delle fibre disposte lungo una sola

direzione, assegnando alle altre il comportamento della matrice, o variarne il comportamento a seconda della loro inclinazione e del numero di strati presenti.

Un generico materiale di tipo ortotropo considera una relazione stress – strain del tipo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma} \quad (7.6)$$

Dove \mathbf{C} è il tensore costitutivo. Considerando i tensori di deformazione e di tensione in forma vettoriale \mathbf{C} è definito attraverso la matrice (6×6) definita attraverso la matrice:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & -\nu_{zx}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & -\nu_{zy}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{xz}/E_x & -\nu_{yz}/E_y & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

In cui E_i e ν_i sono rispettivamente il modulo elastico e il coefficiente di Poisson nella direzione i (con $i = x, y, z$). I coefficienti di Poisson devono rispettare le seguenti restrizioni:

$$v_{yx} = v_{xy} \frac{E_y}{E_x} ; v_{zx} = v_{xz} \frac{E_z}{E_x} ; v_{zy} = v_{yz} \frac{E_z}{E_y} \quad (7.8)$$

Nell'implementazione numerica deve essere nota la matrice $\mathbf{D}=\mathbf{C}^{-1}$ che risulta:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E_x(1-v_{yz}v_{zy})/k & E_x(v_{yz}v_{zx}+v_{yx})/k & E_x(v_{yx}v_{zy}+v_{zx})/k & 0 & 0 & 0 \\ E_y(v_{xz}v_{zy}+v_{xy})/k & E_y(1-v_{xz}v_{zx})/k & E_y(v_{xy}v_{zx}+v_{zy})/k & 0 & 0 & 0 \\ E_z(v_{xy}v_{yz}+v_{xz})/k & E_z(v_{xz}v_{yx}+v_{yz})/k & E_z(1-v_{xy}v_{yx})/k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Dove: $k = 1 - v_{yz}v_{zy} - v_{xy}v_{yx} - v_{xz}v_{zx} - v_{xy}v_{yz}v_{zx} - v_{yx}v_{zy}v_{xz}$.

La matrice \mathbf{D} deve risultare definita positiva quindi devono valere le seguenti restrizioni:

$$\begin{aligned}
1 - \nu_{yz} \nu_{zy} - \nu_{xy} \nu_{yx} - \nu_{xz} \nu_{zx} - \nu_{xy} \nu_{yz} \nu_{zx} - \nu_{yx} \nu_{zy} \nu_{xz} &> 0 \\
1 - \nu_{yz} \nu_{zy} &> 0 \\
1 - \nu_{xz} \nu_{zx} &> 0 \\
1 - \nu_{xy} \nu_{yx} &> 0
\end{aligned}
\tag{7.10}$$

La classe `cElastiOrt`, letto da input le componenti E_i , ν_i nelle tre direzioni definisce il tensore costitutivo del materiale, ed effettua i controlli descritti precedentemente. *Nel caso in cui i valori inseriti non fossero compatibili con le restrizioni richieste per questa tipologia di materiali, il codice si bloccherebbe rilasciando un messaggio di errore.*

La classe è composta dalle funzioni:

- `tElasticOrt` è la variabile derivata per la caratterizzazione del materiale elastico ortotropo.
- `tElasticOrt` costruttore della variabile di tipo `tElasticOrt`.
- `readInputElasticOrt` effettua la lettura delle caratteristiche del materiale elastico lineare ortotropo dal file di input.
- `constitutiveMatrixEO` definisce la matrice costitutiva \mathbf{D} del materiale elastico lineare ortotropo.
- `stressElasticOrt` definisce il vettore delle tensioni note le deformazioni con il vettore *strain* e le caratteristiche del materiale *materialEl*.

7.12.1 Test

Per valutare la corretta implementazione del materiale lineare ortotropo nel codice di ricerca realizzato è stato fatto il confronto dei risultati con il codice commerciale (Strand7) che supporta la stessa tipologia di materiale. Su entrambi i codici è stato realizzato un modello composto da un unico elemento brick a 20 nodi di dimensioni 1000×1000×1000mm, vincolando isostaticamente la faccia inferiore e applicando un carico verticale pari a $F_z = -10.0N$ negli 8 nodi della faccia superiore. Le caratteristiche del materiale sono state riportate in Tab. 33, ed è stata eseguita un'analisi incrementale in 10 step.

E_x [MPa]	E_y [MPa]	E_z [MPa]
4000	4000	210000
ν_{xy}	ν_{xz}	ν_{yz}
0.00	0.00	0.00
G_{xy}	G_{xz}	G_{yz}
2000	2000	105000

Tab. 33 Material characteristics

Il confronto tra codice commerciale e codice di ricerca è stato fatto considerando gli spostamenti (D_x , D_y , D_z) su di un nodo di spigolo della

faccia di testa. Essendo un problema simmetrico i nodi di spigolo in valore assoluto presentano le stesse componenti di spostamento. In Fig. 112 sono stati confrontati i valori delle tre componenti di spostamento nei vari step di carico. I risultati ottenuti risultano identici per entrambi i codici, per un numero di cifre decimali pari alla tolleranza assegnata al solutore. Questa è stata variata effettuando vari test fino ad arrivare alla doppia precisione (quindici cifre decimali).

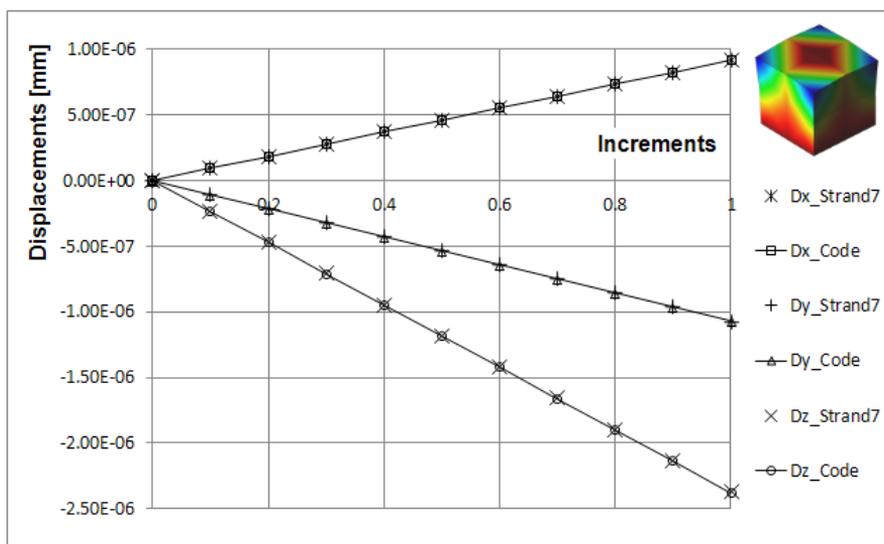


Fig. 112 Comparison between Strand7 and Research Code

7.13 cViscoElastic

Come spiegato nei capitoli precedenti sono stati implementati due tipologie di comportamenti viscoelastici per poter rappresentare sia il calcestruzzo che i materiali compositi realizzati attraverso fibre immerse in matrici polimeriche. cViscoElastic è la classe “madre” con il compito di gestire tutte le tipologie di materiali elastoviscosi implementati.

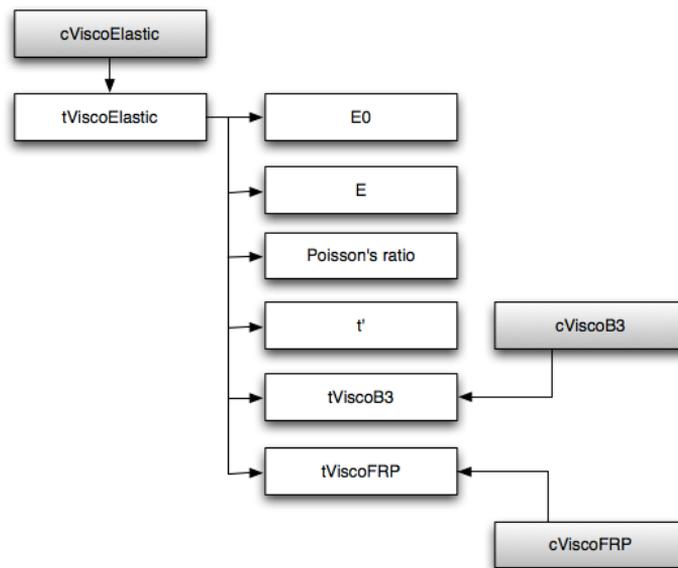


Fig. 113 diagramma fi flusso della variabile tViscoElastic

L'elemento principale della classe risulta essere la variabile di tipo derivato *tViscoElastic*, il cui diagramma di flusso è rappresentato in Fig. 113, che contiene al suo interno sia il modello B3 definito con il puntatore *matB3*, di tipo *tViscoB3* che il modello micromeccanico attraverso il puntatore *matFRP* di tipo *tViscoFRP*. Nel Box 19 è stato riportato il modulo in oggetto omettendo per brevità alcune semplici funzioni.

```

module cViscoElastic
use cGlobal
use cViscoB3
use cViscoFRP
implicit none

type tViscoElastic
  integer :: typeVE
  real*8 :: young0
  real*8 :: young
  real*8 :: poisson
  real*8 :: loadTime
  type(tViscoB3), dimension(:), pointer :: matB3
  type(tFrpCreep), dimension(:), pointer :: matFRP

end type tViscoElastic

contains
  !-----
subroutine tViscoElastic_(ViscoElasticotropicMaterial)

```

```

implicit none
.....
return
end subroutine tViscoElastic_
!-----
subroutine newviscoElastic(matVE)
implicit none
.....
return
end subroutine newviscoElastic
!-----
subroutine readInputViscoElastic(unit,indexMaterial, viscoMat)
implicit none
integer                :: unit
integer                :: indexMaterial
type(tViscoElastic)   :: viscoMat
character(LEN=1)      :: char
character(LEN=132)    :: st
st = ""
loop1: do while (      (st.ne.'endve'           ).and. &
                        (st.ne.'endVe'          ).and. &
                        (st.ne.'endVE'          ).and. &
                        (st.ne.'ENDVE'         ).and. &
                        (st.ne.'ENDVe'         ).and. &
                        (st.ne.'ENDve'         ).and. &
                        (st.ne.'Endve'         ).and. &
                        (st.ne.'EndVe'         ).and. &
                        (st.ne.'EndVE'         ).and. &
                        (.not.EOF(unit)        )
read(unit,*) st
if ((char.ne.'!').and.(st.ne.")) then

```

```

if((st=='b3').or.(st=='B3')) then
  viscoMat%typeVE = 1
  call newviscoElastic(viscoMat)
  call readInputB3(unit, viscoMat%matB3(one))
else if (      (st=='micromec').or.(st=='MICROMECC' )).or.      &
              (st=='microMec').or.(st=='microMec'  ).or.      &
              (st=='MicroMec').or.(st=='MICROmec'  ).or.      &
              (st=='microMEC').or.(st=='MICROMECC' )      ) then

  viscoMat%typeVE = 2
  call newviscoElastic(viscoMat)
  call readInputFrpCreep(unit, viscoMat%matFRP(one))
  !initial young modulus control
  call comparisonMicroMecYoung0(0,viscoMat%young0,      &
                                viscoMat%matFRP(one))
else if ((st=='elastic').or.(st=='ELASTIC')) then

  read(unit,*,err=998)  indexMaterial,      &
                        viscoMat%young0,    &
                        viscoMat%poisson

else if ((st=='loadtime'      ).or.(st=='loadTime'      ).or. &
          (st=='Loadtime'     ).or.(st=='LoadTime'     ).or. &
          (st=='LOADtime'     ).or.(st=='loadTIME'     ).or. &
          (st=='LOADTime'     ).or.(st=='loadTIME'     ).or. &
          (st=='LOADTIME')      ) then

  backspace(unit)
  read(unit,*,err=998) st, viscoMat%loadTime
end if
end if
end do loop1
return
998 continue
999 format('ERROR: in readInputViscoElastic')
write(* ,999)

```

```

stop
end subroutine readInputViscoElastic
!-----
real*8 function getYoung0ViscoElastic(viscoMat)
implicit none
type(tViscoElastic)      :: viscoMat
    getYoung0ViscoElastic = viscoMat%young0
return
end function getYoung0ViscoElastic
!-----
real*8 function getYoungViscoElastic(viscoMat,time)
implicit none
type(tViscoElastic)      :: viscoMat
real*8                    :: time
if (time<=viscoMat%loadTime) then
    viscoMat%young = viscoMat%young0
else
    select case (viscoMat%typeVE)
    case (1)
        viscoMat%young = youngModelB3(viscoMat%young0,      &
                                       viscoMat%matB3(one),   &
                                       time,viscoMat%loadTime)
    case (2)
        viscoMat%young = youngMicroMec(0,                  &
                                       viscoMat%matFRP(one), &
                                       time,                  &
                                       viscoMat%loadTime)
    end select
end if
    getYoungViscoElastic = viscoMat%young
return

```

```

end function getYoungViscoElastic
!-----
real*8 function getPoissonViscoElastic(ViscoElasticropicMaterial)
implicit none
type(tViscoElastic) :: ViscoElasticropicMaterial
  getPoissonViscoElastic = ViscoElasticropicMaterial%poisson
return
end function getPoissonViscoElastic
!-----
subroutine constitutiveMatrixVE(unit, materialVE, matD, time)
implicit none
  .....
  .....
return
end subroutine constitutiveMatrixVE
!-----
subroutine stressViscoElastic (unit, strain, stress, materialVE,time)
implicit none
  .....
return
end subroutine stressViscoElastic

end module cViscoElastic

```

Box 19 cViscoElastic.f90

La classe contiene le seguenti funzioni:

- tViscoelastic costruttore della variabile derivata tViscoElastic.
- newViscoElastic ha il compito di inizializzare il nuovo materiale viscoelastico a seconda del tipo (se *typeVE* = 1 verrà seguito il

comportamento B3 mentre se $typeVE = 2$ si seguirà il modello micromeccanico). La tipologia di materiale viscoelastico viene definita in input.

- readInputViscoElastic funzione che controlla la lettura da input delle caratteristiche del materiale viscoelastico.
- getYoung0ViscoElastic ritorna il modulo elastico istantaneo del materiale viscoelastico *viscoMat*.
- getYoungViscoElastic ritorna il modulo elastico al tempo corrente *time*, del materiale viscoelastico *viscoMat*.
- getPoissonViscoElastic ritorna il coefficiente di poisson del materiale viscoelastico *ViscoElasticTropicMaterial*.
- constitutiveMatrixVE definisce la matrice costitutiva *matD*, del materiale viscoelastico *materialVE*, al tempo *time*.
- stressViscoElastic partendo dal vettore delle deformazioni *strain*, dal materiale viscoelastico *materialVE*, e dal tempo *time*, si definisce il vettore delle tensioni *stress*.

7.14 cViscoB3

La classe che regola il comportamento di un materiale viscoso secondo la teoria B3 (Bazant & Baweja, 1995, 415-430, Bazant & Baweja, 2000, 1-83), vista nei capitoli precedenti.

La classe è composta dalle seguenti funzioni:

- tViscoB3 costruttore della variabile derivata *tViscoB3*.
- readInputB3 legge le caratteristiche del materiale da input assegnando i valori letti alla variabile *matB3*.
- youngModelB3 ritorna il valore del modulo elastico al tempo *time* del materiale *matB3* considerando il tempo di inizio carico *t0*. Se il tempo dell'analisi *time*, dovesse risultare $< t0$ il modulo elastico risulterà quello iniziale pari al modulo elastico istantaneo del materiale stesso.

7.15 cViscoFRP

Definisce il comportamento del materiale viscoelastico considerando la teoria micromeccanica per i compositi a fibre (Ascione & Berardi, 2006, 7-10) vista nei capitoli precedenti.

La classe è composta dalle seguenti funzioni:

- tFrpCreep costruttore della variabile derivata tFrpCreep.
- readInputFrpCreep legge le caratteristiche del materiale da input assegnando i valori letti alla variabile *frpCreepMat*.
- frpJm ritorna la funzione di viscosità della matrice.
- frpJf ritorna la funzione di viscosità della fibra.
- frpJ ritorna la funzione di viscosità totale matrice + fibra.
- Young0MicroMech ritorna il modulo elastico istantaneo del composito.
- YoungMicroMech ritorna il valore del modulo elastico al tempo *time* del materiale *frpCreepMat* considerando il tempo di inizio carico *timeLoad*. Se il tempo dell'analisi *time*, dovesse risultare < *timeLoad* il modulo elastico risulterà quello iniziale pari al modulo elastico istantaneo del materiale stesso.

7.16 cLoad

Il codice permette l'inserimento di azioni meccaniche quali carichi nodali. La classe cLoad regola i tipi di carichi implementati. Attualmente sono stati considerati carichi concentrati nodali definiti dalla sottoclasse concLoad. Ad ogni nodo è possibile assegnare un carico concentrato definito attraverso le tre componenti spaziali. Il carico può essere variato o tolto, effettuando restart al modello che effettuerà un aggiornamento del vettore globale delle forze.

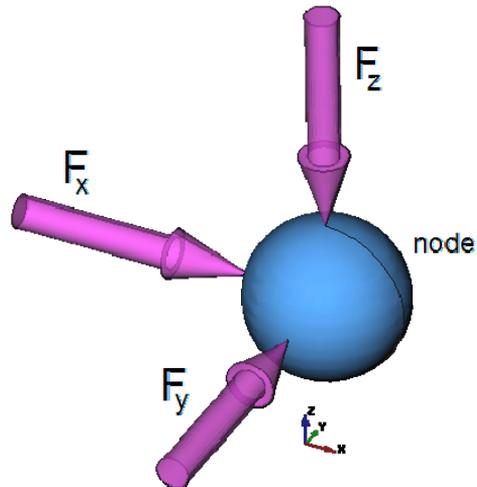


Fig. 114 Carichi nodali

La classe è composta dalle funzioni:

- tLoad è la variabile derivata che caratterizza i vari tipi di carico che possono essere assegnati al modello.
- tLoad costruttore che inizializza la variabile tLoad.
- newLoad a seconda del tipo di carico letto (attualmente può essere solo concentrato, ma il codice è stato scritto in modo da poter implementare nuove tipologie di carico) inizializza la sottovariabile del carico voluto.
- setLoad funzione di assegnazione del carico.
- deleteLoad funzione che distrugge un carico precedentemente assegnato.

7.16.1 Test

Per simulare una variazione di carico si è realizzato un modello composto da un unico elemento brick a 20 nodi di dimensione 1000x1000x1000mm in cui le condizioni di carico sono riportati in Tab. 34.

<i>step</i>	<i>Carico [N]</i>
0	0
1	5
2	10
3	22.5
4	25

Tab. 34 Carico nodale al variare dello step

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

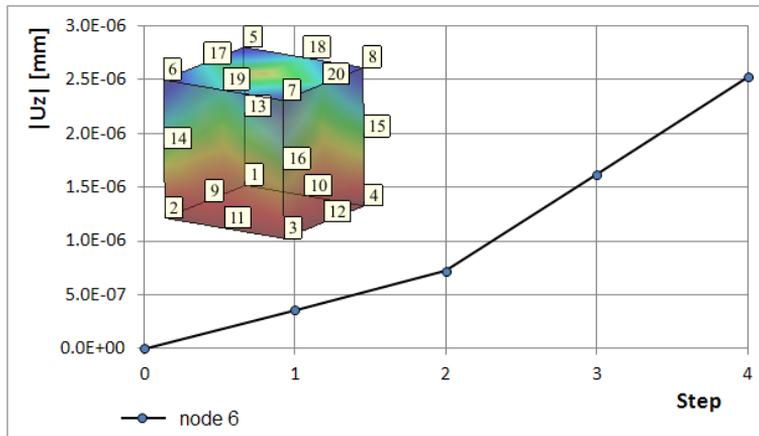


Fig. 115 Test di carico

Dal grafico in Fig. 115 possiamo vedere la crescita lineare degli spostamenti verticali nei primi 2 step soggetti ad un incremento lineare del carico nodale da 0 a 10N, mentre il terzo e il quarto step producono un incremento di carico nodale di 25N a fine analisi (quarto step) e quindi una variazione di pendenza visibile dal diagramma.

7.17 cPenaltyBoundary

La classe ha il compito di controllare la procedura penalty di applicazione delle condizioni al contorno su di una matrice compressa in formato CRS. Il metodo “*penalty*” comporta una leggera approssimazione nella risoluzione del problema (normalmente minore della tolleranza di convergenza e quindi del tutto trascurabile), secondo cui la matrice non viene ridotta, ma modificata.

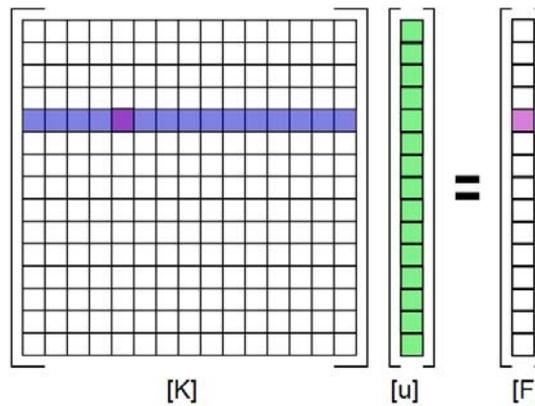


Fig. 116 Schema di applicazione delle condizioni al contorno con il metodo Penalty

Se l' i -esima riga della matrice assemblata coincide con un g.d.l. bloccato (noto quindi lo spostamento $u_i = u_i^*$), si sostituisce al termina diagonale

dell' i -esima riga un valore molto elevato λ chiamato coefficiente di penalty Fig. 116 (cella in viola), generalmente dell'ordine di 10^{40} , e si impone nella corrispondente posizione del vettore dei termini noti un valore pari a λu_i^* . Questa procedura farà sì che l'equazione dell' i -esima riga che il solutore andrà a risolvere sarà del tipo $\sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} u_j + \lambda u_i + \sum_{j=i+1}^n k_{ij} u_j = \lambda u_i^*$, con k_{ij} termini della matrice di rigidezza, u_j valori del vettore delle incognite. Se il termine λ risulta sufficientemente grande, nel primo membro tutti i termini extra diagonali, rappresentati dalle due sommatorie, saranno trascurabili. Conseguentemente $\lambda u_i \cong \lambda u_i^*$ e quindi si sarà ottenuta la soluzione voluta.

La procedura viene eseguita passando per la funzione `penaltyBoundary` che assegna il coefficiente di penalty al sistema.

7.18 cAssembly

L'assemblaggio della matrice di rigidezza locale consiste nel sommare i contributi di rigidezza che ogni elemento associa ai nodi in comune. La matrice di rigidezza locale consiste in una matrice con dimensione pari al numero di nodi per il numero di gradi di libertà associato ad ogni nodo che

contiene i termini di rigidità. Se ad esempio si considera un elemento brick a 20 nodi con un comportamento puramente meccanico (caratterizzato quindi da 3 g.d.l. per nodo) si avrà una matrice di rigidità \mathbf{k}^e di dimensioni (60x60).

Nel codice la matrice \mathbf{k}^e viene definita per ogni elemento nella classe `cElement` attraverso la funzione `stiffnessElement()`. La classe `cAssembly` tramite la matrice delle incidenze nodali che associa ai 20 nodi dell'elemento il numero del nodo corrispondente della mesh, riposiziona la matrice locale in quella assemblata nel caso di elementi brick a 20 nodi, o i 4 nodi nel caso degli elementi Tet4.

La classe assembla in modi diversi la matrice di rigidità globale per poter soddisfare le richieste dei vari schemi risolutivi implementati:

- Utilizzando l'eliminazione di Gauss l'assemblaggio viene eseguito su di una matrice completa non compressa, e l'assegnazione delle condizioni al contorno avviene attraverso l'eliminazione di righe e colonne corrispondenti alla soluzione nota. Questo avviene nelle subroutine `globalStiffness()` e `assemblyBoundary()`.
- Utilizzando lo schema del gradiente coniugato la matrice assemblata deve essere compressa in formato CRS. L'assegnazione delle condizioni al contorno viene eseguita direttamente attraverso l'eliminazione di righe e colonne corrispondenti alla soluzione nota oppure con il metodo Penalty.

Per il corretto funzionamento della classe `cAssembly` devono essere incluse le seguenti classi: `cGlobal`, `cNode`, `cElement`, `cMaterial`, `cContact`, `cCRS`, `cPenalty`.

Le funzioni che caratterizzano la classe sono:

- assembly è la funzione principale che viene richiamata quando si effettua l'assemblaggio delle matrici e regola il tipo di assemblaggio che deve essere fatto a seconda delle opzioni di risoluzione del problema. La funzione viene regolata dalla variabile *matrixFormat*. Se *matrixFormat* = 0 l'assemblaggio viene eseguito senza compressione della matrice, e vengono richiamate le funzioni globalStiffness() e assemblyBoundary() questa assembla le condizioni al contorno andando a ridurre la matrice **K** delle righe e colonne corrispondenti alle condizioni al contorno assegnate. Se *matrixFormat* = 1 si utilizza l'assemblaggio attraverso la procedura della compressione delle matrici in formato CRS attraverso la funzione globalStiffness_CRS() che utilizza il metodo Penalty per l'assegnazione delle condizioni al contorno. Se *matrixFormat* = 2 viene richiamata la funzione nIGlobalStiffness_CRS() utilizzata con il solutore incrementale. Questa subroutine dovendo ricalcolare la matrice di rigidezza ad ogni step è stata modificata rispetto alla precedente fornendole la possibilità di salvare sia la matrice di rigidezza, che i vettori dei carichi e degli spostamenti su files esterni in modo che: se l'analisi si trova allo step n, e la convergenza dello step n-1 è andata a buon fine senza

riscontrare l'attivazione delle non linearità, lo step n partirà con la stessa matrice di rigidezza dello step n-1 quindi nIGlobalStiffness CRS() non ricalcola la matrice ma la legge da file, facendo risparmiare il tempo di creazione della matrice stessa (questa procedura risulta tanto più veloce quanto la matrice assemblata è grande).

- globalStiffness definisce la matrice di rigidezza e il vettore dei nodi e degli spostamenti globali assemblati, senza la compressione della matrice.
- dimAssemblyCRS definisce la dimensione della matrice di rigidezza in formato CRS per effettuare il dimensionamento della matrice stessa.
- reduceStiffness nel caso in cui il metodo Penalty non venga impiegato, questa procedura effettua la riduzione dinamica della matrice compressa in formato CRS. Per riduzione dinamica si intende che la matrice viene dinamicamente ridimensionata durante l'eliminazione delle righe e delle colonne corrispondenti ai nodi vincolati. Questa procedura effettua la riduzione per una variabile di tipo *tCRS* che contiene al suo interno tutti i vettori della matrice compressa, da utilizzare solo se la matrice compressa è stata scritta attraverso la variabile derivata *tCRS*.
- restrainResuction questa funzione effettua la riduzione della matrice di rigidezza a causa delle condizioni al contorno inserite, (quindi effettua la stessa procedura eseguita in reduceStiffness)

ma la chiamata della matrice compressa avviene attraverso i 3 vettori separati **k**, **jk** e **ik**.

- globalStiffness_CRS crea le matrici assemblate del sistema compresse in formato CRS.
- connectivityMatrix funzione che crea la matrice delle connessione. Stabilisce i nodi connessi tra loro attraverso gli elementi finiti. Questa matrice ha quindi il compito di definire le posizioni non nulle della matrice di rigidezza assemblata, e consente di poter definire la dimensione della matrice compressa.
- stiffnessJAIA_CRS considerando che una matrice **A** di dimensioni (nxm) compressa in formato CRS è definita attraverso 3 vettori **a**, **ja**, **ia**, questa funzione attraverso la matrice delle connessioni *connections* definisce i vettori indici di riga **ia** e di colonna **ja**.
- addIntVector ridimensiona un vettore di interi *JA* di dimensione iniziale pari a *dim* alla dimensione *newDim*.
- addRealVercot ridimensiona un vettore di interi *realVector* di dimensione iniziale pari a *dim* alla dimensione *newDim*.
- nIGlobalStiffness_CRS calcola la matrice di rigidezza in formato CRS per analisi incrementali.

7.19 cSolver

Questa classe gestisce tutte le tipologie di solutori implementati nel codice. A seconda dell'analisi che si deve effettuare verranno richiamati i sottoprogrammi necessari per la risoluzione del problema.

Per la risoluzione del sistema lineare $\mathbf{Ku}=\mathbf{F}$ in cui \mathbf{K} è la matrice di rigidità globale, \mathbf{u} il vettore delle incognite (i g.d.l. liberi) ed \mathbf{F} il vettore delle forze, sono stati impiegati due tipologie di schemi risolutivi. Il primo schema considera il metodo diretto dell'eliminazione di Gauss mentre il secondo lo schema iterativo del gradiente coniugato c.g. (Gambolati, 2002), uno schema iterativo per la risoluzione di sistemi lineari.

Nel caso di analisi non lineari si andrà sempre a risolvere un sistema linearizzato del tipo $\mathbf{K}^{n+1}\Delta\mathbf{u}=\mathbf{R}$, dove: \mathbf{K}^{n+1} è la matrice di rigidità al passo $(n+1)$ $\Delta\mathbf{u}$ è la variazione della soluzione al passo $(n+1)$ \mathbf{R} è il residuo che dovrà essere minimizzato. $\mathbf{R} = \mathbf{F}^{\text{ext}}-\mathbf{F}^{\text{int}}$, in cui \mathbf{F}^{ext} è il vettore delle forze esterne mentre \mathbf{F}^{int} il vettore delle forze interne al passo $(n+1)$. Anche per analisi non lineari quindi potranno essere impiegati entrambi gli schemi risolutivi implementati.

Il metodo di eliminazione di Gauss consiste nella triangolarizzazione della matrice \mathbf{K} mediante operazioni di base sulle righe del sistema. Trovata la matrice triangolare attraverso la procedura di back substitution partendo dall'ultima equazione (in cui la soluzione sarà nota) si ritroveranno tutte le incognite u_i .

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_0 \quad (7.12)$$

Il vettore \mathbf{p} è di tipo K-ortogonale e in generale si ottiene dall'equazione

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k \quad (7.13)$$

indicando con il pedice (k) il numero di iterazione e dove il coefficiente

$$\beta_k = -\frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{K} \mathbf{p}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{K} \mathbf{p}_k} \quad (7.14)$$

Considerando ancora il termine $\alpha_k = \frac{\mathbf{p}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{K} \mathbf{p}_k}$, lo schema risolutivo risulta

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k \\ \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \alpha_k \mathbf{K} \mathbf{p}_k \end{cases} \quad (7.15)$$

Ottenuta la soluzione, sono state create librerie nel file `GID.f90` per poter visualizzare graficamente i risultati ottenuti con il programma commerciale `GiD` utilizzato come post processore del programma FEM realizzato

Richiama le classi: `cContact`, `cLinearSolver`, `cLinearSolver_CRS`, `cSolverCond`, `nISolver` `cStep`, `cSet`.

7.20 cGaussElimination

File in cui sono contenute le subroutine per ottenere la soluzione del sistema lineare mediante l'eliminazione di Gauss. A questo tipo di solutore non è stato assegnato nessun formato di compressione delle matrici, quindi per mesh medio grandi risulta essere molto lento, e presenta notevoli problemi di saturazione della memoria.

Consigliato per effettuare test su pochi elementi.

7.21 cSolverCond

Classe per la definizione delle condizioni del solutore. Definisce due tipi derivati: tSolverOpt per la definizione delle opzioni del solutore e tSolver per la definizione del tipo di solutore.

Le funzioni che caratterizzano la classe sono:

- tSolver costruttore della variabile tSolver. Il costruttore assegna una condizione di default alla variabile tSolver che coincide con un solutore di tipo incrementale, che utilizza la

compressione della matrice in formato CRS, con le tolleranze per i controlli di convergenza assunte pari a 1×10^{-11} . Se nel file di input non vengono esplicitamente assegnate nuove condizioni, l'analisi verrà eseguita con queste impostazioni del solutore.

- tSolberOpt costruttore della variabile tSolverOpt. Il costruttore assume in default il solutore iterativo con il metodo del gradiente coniugato GC; (c'è la possibilità di utilizzare come alternativa un solutore diretto attraverso il metodo dell'eliminazione di Gauss. Questo metodo diretto non supporta nessun formato di compressione della matrice, quindi è sconsigliato per mesh grandi in quanto satura velocemente lo spazio di memoria). La precisione del solutore GC viene assunta in default pari a 0.00001 con un numero massimo di iterazioni di 1000. Tutte queste caratteristiche possono essere modificate nel file di input.
- plotSolver stampa nel file risultati le caratteristiche del solver scelte.
- readSolverConditions legge da input le condizioni del solutore.

7.22 cLinearSolver

È la classe che effettua una soluzione statica lineare considerando lo schema dell'eliminazione di Gauss. Questa classe richiama: cGlobal, cNode, cElement, cMaterial, cContact, cAssembly cGaussElimination.

È composta da un'unica subroutine linearSolver() che determina la soluzione del sistema.

7.23 cLinearSolver_CRS

È la classe che effettua una soluzione statica lineare considerando matrici compresse in formato CRS utilizzando quindi come solutore lo schema del GC. Questa classe richiama: cGlobal, cNode, cElement, cMaterial, cContact, cAssembly.

È composta da un'unica subroutine linearSolver_CRS() che determina la soluzione del sistema.

7.24 nISolver

Effettua la procedura incrementale per la determinazione della soluzione incrementale.

Le funzioni che caratterizzano la classe sono:

- nISolve procedura che gestisce le analisi non lineari andando a definire gli step e gli eventuali substep per l'ottenimento della convergenza.
- updateDisp aggiornamento delle componenti di spostamento
- getExternalLoad ritorna in formato cComponent i carichi esterni applicati.
- plotSolveValue stampa in *unit* lo stato del solutore.
- readLoadFile legge il file dei carichi precedentemente salvato.
- readDispFile legge il file degli spostamenti precedentemente salvato.

7.25 cStep

Si occupa degli step delle analisi incrementali o transitorie attraverso la definizione della variabile tStep v. Box 20

```
type tStep
  real*8  :: dTime
  real*8  :: maxTime
  integer :: maxIter
end type tStep
```

Box 20 Tipo derivato tStep

In cui si definisce l'incremento di tempo *dTime*, il tempo finale *maxTime*, e il numero massimo di iterazioni possibili, *maxIter* che possono essere fatte per raggiungere la convergenza della soluzione nello step.

Le funzioni che caratterizzano la classe sono:

- tStep costruttore di tStep che assegna come valore iniziali: *dTime* = 0.001; *maxTime* = 1.0 *maxIter* = 1000. L'analisi di default è quindi composta da 100 step. Tutti questi parametri possono essere modificati da input.

- plotStepConditions stampa nell'unità *unit*, le condizioni assegnate alla variabile *step* definita come *tStep*.

7.26 GID.f90

Questo è il file che contiene tutte le subroutine per stampare il file risultati nel formato GiD programma di pre-post processing. I sottoprogrammi sviluppati sono:

- createMeshGID crea il file *.post.msh* per la definizione della geometria della mesh.
- inizializzaGID inizia a scrivere il database dei risultati, il file *.post.res*, assegnando i punti Gauss degli elementi utilizzati.
- plotDisplacementGID stampa le componenti di spostamento nodali nel file *.post.res*.
- stressGID stampa il tensore delle tensioni per ogni punto Gauss di ogni elemento nel file *.post.res*.
- strainGID stampa il tensore delle deformazioni per ogni punto Gauss di ogni elemento nel file *.post.res*.

- plotGapFunctionGID stampa le funzioni di gap nelle superfici di contatto nel file .post.res.
- plotCDamageGID plotta il valore della variabile di danno nella superficie di contatto nel file .post.res.
- plotCGapGID stampa le componenti in direzione (x,y,z) della funzione di gap nella superficie di contatto nel file .post.res.

7.27 cSet

Questa classe ha il compito di definire degli “insiemi” di nodi definibili in fase di input per la stampa di particolari risultati (ad esempio le reazioni vincolari). Si definisce la variabile tSet v. Box 21

```
type tSet
  character(LEN=132)           :: name
  integer, dimension(:), pointer :: val
end type tSet
```

Box 21 Tipo derivato tSet

Ogni insieme è quindi definito attraverso un nome *name* e gli indici dei nodi inseriti in un vettore *val*.

La classe è definita dalle seguenti funzioni:

- tSet costruttore della variabile tSet.
- readSet legge i set da input.
- setSet aumenta di un'unità il vettore di variabili tSet.
- setSetVal incrementa il vettore di puntatori *val* per allocare un nuovo indice di nodo.
- getSetVal ritorna il valore nella posizione *index* del vettore *val* di una variabile *set*.

plotSet stampa su una unità definita dall'integer *unit* il valore della variabile *set*.

7.28 logo.f90

File che contiene l'inizializzazione dei file risultati.

7.29 readInputFile.f90

È il file che effettua la lettura dei dati di input.

7.30 cGMsh

Classe per stampare i files risultati che possono essere letti dal programma open source gMsh.

Attualmente questa classe è ancora in fase di sviluppo. Tutti i risultati che il programma può stampare sono stati completamente gestiti nel file `GID.f90` secondo la formattazione del programma di post processamento commerciale GiD.

Le subroutine principali della classe cGMsh sono:

- `createMeshGMSH` dove viene creato il file `.msh` per la definizione della geometria della mesh in formato gMsh.
- `plotDispGMSH` stampa gli spostamenti nodali ad ogni step dell'analisi.

7.31 Appendice

Verranno qui riportate alcune subroutine implementate nel codice:

7.31.1 Modulo *cGlobal*

Definisce le variabili globali del codice:

```
module cGlobal
implicit none
  integer, parameter, public      :: dimSpace      = 3
  integer, parameter, public      :: dimDof        = 0
  integer, parameter, public      :: totDof        = dimSpace + dimDof
  integer, parameter, public      :: one          = 1
  type tComponent
    integer                        :: index
    real*8,dimension(dimSpace)    :: dir
  end type tComponent

  !compress Row Storage
  type tCRS
```

```

real*8,dimension(:), pointer      :: sysMat
integer,dimension(:),pointer      :: row
integer,dimension(:),pointer :: col
end type tCRS

contains

!-----

!costructor
subroutine tComponent_(tComponentObject)
implicit none
type(tComponent)      :: tComponentObject
    tComponentObject%index      = 0
    tComponentObject%dir        = 0.D0
return
end subroutine tComponent_

!-----

subroutine tCRS_(CRS)
implicit none
type(tCRS)      :: CRS
    allocate(CRS%sysMat(0))
    allocate(CRS%row  (0))
    allocate(CRS%col  (0))
return
end subroutine tCRS_

!-----

!distance between two point in a 3D space
real*8 function distance(point1, point2)
implicit none
type(tComponent) :: point1
type(tComponent) :: point2
    distance = dsqrt((point2%dir(1)-point1%dir(1))**(2) + &

```

```

        (point2%dir(2)-point1%dir(2))**(2) +      &
        (point2%dir(3)-point1%dir(3))**(2)      )
return
end function distance
!-----
!define the unit vector
subroutine unitVector(vector)
implicit none
type(tComponent)      :: vector
real*8                :: norm
integer                :: i
    norm = 0.d0
    do i = 1, dimSpace
        norm = norm + vector%dir(i)**(2)
    end do
    norm = sqrt(norm)
    do i = 1,dimSpace
        vector%dir(i)=vector%dir(i)/norm
    end do
return
end subroutine unitVector
!-----
!plot the component of the type(tComponent) vatiabile
subroutine plotComponent(unit, name, vector)
implicit none
integer                :: unit
character(len = *)    :: name
type(tComponent)      :: vector
    write(unit,*) name
    write(unit,999) vector%dir(1),vector%dir(2),vector%dir(3)
return

```

```

999 format ('I',F10.7,',',F10.7,',',F10.7,'J')
end subroutine plotComponent

real*8 function dist(point1, point2)
implicit none
type(tComponent) :: point1
type(tComponent) :: point2
  dist = sqrt((point2%dir(1)-point1%dir(1))**2.D0      + &
              (point2%dir(2)-point1%dir(2))**2.D0      + &
              (point2%dir(3)-point1%dir(3))**2.D0      )

return
end function dist

!-----
!the dimension of CRS%row vector is fix equal to (size(matrix,1)+1)
!is possibile hence allocate the memory.
type(tCRS) function compress(matrix)
implicit none
real*8,dimension(:,:) :: matrix
integer :: i,j
integer :: row
  call TCRS_(compress)
  allocate(compress%row(size(matrix,1)+1))
  row = 0
  do i=1,size(matrix,1)
    do j=1,size(matrix,2)
      if(matrix(i,j).ne.0.D0) then
        call setCRS(matrix(i,j),i,j,compress)
        if (row < i) then
          row = row + 1
          compress%row(row) = size(compress%col)
        end if
      end if
    end do
  end do

```

```

end do
compress%row(size(matrix,1)+1) = size(compress%col)+1
return
end function compress
!-----
subroutine setCRS(value,row,col, CRSmatrix)
implicit none
real*8 :: value
integer :: row
integer :: col
type(tCRS) :: CRSmatrix
integer :: dimCRS
integer :: dimRow
integer :: i
real*8, dimension(:), allocatable :: sysMat
integer, dimension(:), allocatable :: rowMat
integer, dimension(:), allocatable :: colMat

if(size(CRSmatrix%sysMat)<= 0 ) then
  allocate(CRSmatrix%sysMat(1))
  allocate(CRSmatrix%col (1))
  CRSmatrix%sysMat(1) = value
  CRSmatrix%col(1) = col
else
  dimCRS = size(CRSmatrix%sysMat)
  dimRow = size(CRSmatrix%row)
  allocate(sysMat(dimCRS))
  allocate(colMat(dimCRS))

  sysMat = CRSmatrix%sysMat
  colMat = CRSmatrix%col

```

```

deallocate(CRSmatrix%sysMat)
deallocate(CRSmatrix%col)

allocate(CRSmatrix%sysMat(dimCRS + 1))
allocate(CRSmatrix%col (dimCRS + 1))

do i = 1, dimCRS
  CRSmatrix%sysMat(i) = sysMat(i)
  CRSmatrix%col (i) = colMat (i)
end do
CRSmatrix%sysMat(dimCRS+1) = value
CRSmatrix%col (dimCRS+1) = col
end if
return
end subroutine setCRS

!-----
!open a generic file16
subroutine openFile(unit, nameFile)
implicit none
integer      :: unit
character(*) :: nameFile
  open (unit,file=nameFile, status='unknown',form='unformatted')
return
end subroutine openFile

!-----
!dealloche a generic file
subroutine deallocateFile(unit,nameFile)
implicit none
integer      :: unit
character(*) :: nameFile
  close(unit)
  open (unit,file=nameFile, status='unknown',form='unformatted')

```

```

write(unit) ""
close(unit)
return
end subroutine deallocateFile
!-----
!add tComponent Pointer
subroutine addTComponentPointer(point)
implicit none
type(tComponent), dimension(:), pointer :: point
type(tComponent), dimension(:), allocatable :: copyPoint
integer :: i
allocate(copyPoint(size(point)))
copyPoint = point
deallocate(point)
allocate(point(size(copyPoint)+1))
do i = 1, size(copyPoint)
point(i) = copyPoint(i)
end do
call tComponent_(point(size(point)))
deallocate(copyPoint)
return
end subroutine addTComponentPointer
!-----
subroutine addIntPointer(integerPointer, value)
implicit none
integer, dimension(:), pointer :: integerPointer
integer :: value
integer, dimension(:), allocatable :: integerPointerCopy
integer :: i, dim
dim = size(integerPointer)
if (dim <= 0) then

```

```

    allocate(integerPointer(1))
    integerPointer(1) = value
else
    allocate(integerPointerCopy(dim))
    integerPointerCopy = integerPointer
    deallocate(integerPointer)
    allocate(integerPointer(dim+1))
    do i=1,dim
        integerPointer(i) = integerPointercopy(i)
    end do
    integerPointer(dim+1) = value
end if
return
end subroutine addIntPointer
!-----
subroutine addRealPointer(realPointer, value)
implicit none
real(KIND=8), dimension(:), pointer           :: realPointer
real(KIND=8)                                   :: value
real(KIND=8), dimension(:), allocatable       :: realPointer_copy
integer                                         :: i
integer                                         :: dim
    dim = size(realPointer)
    if (dim<=0) then
        allocate(realPointer(1))
        realPointer(1) = value
    else
        allocate(realPointer_copy(dim))
        realPointer_copy = realPointer
        deallocate(realPointer)
        allocate(realPointer(dim+1))
        do i = 1,dim
            realPointer(i) = realPointer_copy(i)

```

```
    end do
    realPointer(dim+1) = value
  end if
return
end subroutine addRealPointer
!-----
subroutine plotIntMatrix (unit,mat)
implicit none
integer                :: unit
integer, dimension(:,) :: mat
integer                :: i
integer                :: j
  do i=1,size(mat,1)
    write(unit,999) (mat(i,j),j=1,size(mat,2))
  end do
return
999 format(100i1)
end subroutine plotIntMatrix
!-----
subroutine plotRealMatrix (unit,mat)
implicit none
integer                :: unit
real*8, dimension(:,) :: mat
integer                :: i
integer                :: j
  write(unit,*)
  do i=1,size(mat,1)
    write(unit,999) (mat(i,j),j=1,size(mat,2))
  end do
return
999 format(100f30.15)
```

```

end subroutine plotRealMatrix
!-----
subroutine plotCRS(unit,IA,JA,A)
implicit none
integer                                :: unit
integer, dimension(:)                  :: IA
integer, dimension(:)                  :: JA
real*8 , dimension(:)                  :: A
integer                                :: dim
integer                                :: n,i,j,cont
dim = size(IA)-1
cont = 1
do i = 1,dim
  write(unit,*)
  n = IA(i+1)-IA(i)
  do j = 1,dim
    if (j==JA(cont))then
      write(unit,999,advance='no') A(cont)
      cont = cont + 1
    else
      write(unit,999,advance='no') 0.d0
    end if
  end do
end do
write(unit,*)
return
999 format(e12.3)
end subroutine plotCRS

end module cGlobal

```

Box 22 cGlobal.f90

7.31.2 Modulo *cMaterial*

Viene riportato il codice della classe *cMaterial* che controlla tutte le tipologie di materiale supportate dal codice.

```
module cMaterial
use cGlobal
use cElasticIso
use cElasticOrt
use cViscoElastic
implicit none

type tMaterial
integer :: index
integer :: materialType
type(tElasticIso), dimension(:), pointer :: elasticIso
type(tElasticOrt), dimension(:), pointer :: elasticOrt
type(tViscoElastic), dimension(:), pointer :: viscoElastic
end type tMaterial

contains
!-----COSTRUCTOR
subroutine tMaterial_(material)
implicit none
type(tMaterial) :: material
```

```

material%index          = 0
material%materialType  = 0
end subroutine tMaterial_

!-----NEW MATERIAL
subroutine newMaterial(material)
implicit none
type(tMaterial) :: material
select case (material%materialType)
case (1)
  allocate(material%elasticIcso(one))
  call tElasticIcso_(material%elasticIcso(one))
case (2)
  allocate(material%elasticOrt(one))
  call tElasticOrt_(material%elasticOrt(one))
case (3)
  allocate(material%viscoElastic(one))
  call tViscoElastic_(material%viscoElastic(one))
end select
return
end subroutine newMaterial

!-----READ MAT IN INPUT FILE
subroutine readInputMaterial(unit, material)
implicit none
integer          :: unit
type(tMaterial)  :: material
character(LEN=80) :: row
integer          :: controller

controller = 0
row = ""
do while (controller.ne.1)
  read(unit,*) row
  if ((row=='elasticIcso').or. &
      (row=='elasticIcso').or. &

```

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```
(row=='ELASTICISO') )then
  controller = 1
  material%materialType = 1
  call newMaterial(material)
  call readInputElasticIso(unit,material%index,material%elasticIso(one))
else if((row=='elasticOrt').or. &
  (row=='elasticort').or. &
  (row=='ELASTICORT') )then
  controller = 1
  material%materialType = 2
  call newMaterial(material)
  call readInputElasticOrt(unit,material%index,material%elasticOrt(one))
else if ((row=='viscoelastic'
  (row=='viscoElastic'
  (row=='VISCOELASTIC') )then
  controller = 1
  material%materialType = 3
  call newMaterial(material)
  call readInputViscoElastic(unit,material%index, material%viscoElastic(one))
end if
end do
return
end subroutine readInputMaterial
!-----GET FUNCTION
type(tElasticIso) function getElasticIso(material)
implicit none
type(tMaterial) :: material
getElasticIso = material%elasticIso(one)
return
end function getElasticIso
type(tElasticOrt) function getElasticOrt(material)
```

```

implicit none
type(tMaterial) :: material
  getElasticOrt = material%elasticOrt(one)
return
end function getElasticOrt
type(tViscoElastic) function getViscoElastic(material)
implicit none
type(tMaterial) :: material
  getViscoElastic = material%viscoElastic(one)
return
end function getViscoElastic

!-----CONSTITUTIVE MATRIX
subroutine constitutiveMatrix(unit,time, material,matD)
implicit none
integer :: unit
type(tMaterial) :: material
real*8 :: time
real*8,dimension(:,:),pointer :: matD
  if (material%materialType==1) then
    call constitutiveMatrixEI(unit,getElasticIso(material),matD)
  else if (material%materialType==2) then
    call constitutiveMatrixEO(unit,getElasticOrt(material),matD)
  else if (material%materialType==3) then
    call constitutiveMatrixVE(unit,getViscoElastic(material),matD,time)
  else
    write(unit,999) material%materialType
    pause
    stop
  end if
return
999 format('ERROR: material number ',i3,' is not present.',/, &
  'The program was terminated.')
end subroutine constitutiveMatrix

```

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```
!-----FIND MATERIAL
type(tMaterial) function findMaterial(indexMaterial,materials)
implicit none
integer                                :: indexMaterial
type(tMaterial),dimension(:)           :: materials
integer                                :: i
  call tMaterial_(findMaterial)
  do i = 1,size(materials)
    if (materials(i)%index == indexMaterial) then
      findMaterial = materials(i)
    exit
  end if
end do
return
end function findMaterial
!-----FIND ELEMENT STRESS
subroutine findElementStress(unit,time,strain,stress,indexMaterial,materials)
implicit none
integer                                :: unit
real*8                                 :: time
real*8, dimension(:)                   :: strain
real*8, dimension(:)                   :: stress
integer                                :: indexMaterial
type(tMaterial),dimension(:)           :: materials
type(tMaterial)                         :: currentMat
  currentMat = findMaterial(indexMaterial,materials)
  select case (currentMat%materialType)
  case (1) !elastic iso
    call stressElasticIso (unit, strain, stress, currentMat%elasticIso(ONE))
  case (2) !elastic ort
    call stressElasticOrt (unit, strain, stress, currentMat%elasticOrt(ONE))
```

```

case (3)
  call stressViscoElastic (unit, strain, stress, currentMat%viscoElastic(ONE),time)
case (4)
  ! insert new material
end select
return
end subroutine findElementStress
type(tMaterial) function getMaterial(unit,indexMaterial, materials)
implicit none
integer                :: unit
integer                :: indexMaterial
type(tMaterial),dimension(:) :: materials
if (size(materials).ne.0) then
  if (indexMaterial<=size(materials)) then
    getMaterial = materials(indexMaterial)
  else
    getMaterial = materials(1)
    write(6,998) indexMaterial
  end if
else
  write(6,999)
  pause
  stop
end if
return
998 format('WARNING: in function getMaterial, material number: ',i3,'is not present.',/, &
        'Material number 1 has been used')
999 format('ERROR: in function getMaterial, the vector s material is void',/,&
        'the program was terminated')
end function getMaterial
end module cMaterial

```

Box 23 cMaterial.f90

7.31.3 Assembly

La subroutine Assembly controllo il tipo di assemblaggio che il codice effettua al variare delle opzioni di soluzione date da input.

```

subroutine assembly(      unit,time,matrixformat,step,  &
                          nodes,elements,materials,    &
                          noCompressK,K,JK,IK,        &
                          gLoad,gDisp,restrain,       &
                          vSlave, vMaster, pair,      &
                          vSlaveNode,                &
                          diagonalValue                )

implicit none
integer                                :: unit
real*8                                 :: time
integer                                :: step
type(tNode), dimension(:)              :: nodes
type(tElement), dimension(:)           :: elements
type(tMaterial), dimension(:)          :: materials
real*8, dimension(:,:), pointer        :: noCompressK
real*8, dimension(:), pointer          :: K
integer, dimension(:), pointer         :: IK
integer, dimension(:), pointer         :: JK
type(tCRS)                             :: K_CRS
real*8, dimension(:), pointer          :: gLoad
    
```

```

real*8,          dimension(:), pointer           :: gDisp
integer,         dimension(:), pointer           :: restrain
type(tContact), dimension(:), pointer           :: vSlave
type(tContact), dimension(:), pointer           :: vMaster
type(tslave),    dimension(:), pointer           :: vSlaveNode
real*8,          dimension(size(nodes)*totDof)   :: diagonalValue
type(tpair),     dimension(:), pointer           :: pair
integer          :: dimStiffness
integer,         dimension(:,:), allocatable     :: nodeCondition
integer          :: cont
real*8,          dimension(:,:), allocatable     :: assemblyStiffness
real*8,          dimension(:) , allocatable     :: assemblyLoad
integer          :: i,j
integer          :: matrixformat

select case (matrixformat)

case(0)

    call globalStiffness(unit,time,nodes,elements,materials,noCompressK)
    call assemblyBoundary(nodes, gLoad, gDisp, restrain)

case (1)

    callglobalStiffness_CRS(      unit,time,          &
                                nodes,elements,      &
                                materials,            &
                                K,JK,IK,              &
                                gLoad,gDisp,          &
                                restrain                )

case (2)

    call nIGlobalStiffness_CRS( unit,time,step,      &

```

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI
INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```
nodes,elements,      &  
materials,K,JK,IK,   &  
gLoad,gDisp,restrain, &  
vSlave, vMaster, pair, &  
vSlaveNode,         &  
diagonalValue       )  
  
end select  
return  
end subroutine assembly
```

Box 24 subroutine Assembly

8 MODELLI NUMERICI

8.1 Introduzione

In questo capitolo verranno descritti i modelli numerici realizzati per la simulazione di strutture rinforzate esternamente con fogli o lamine in FRP.

I primi tentativi di simulazione del fenomeno di delaminazione attraverso la teoria del contatto associata al danneggiamento, sono stati effettuati mediante l'implementazione della legge contatto-danno nel codice ad elementi finiti ABAQUS impiegando opportune subroutine che il codice consente di modificare attraverso una programmazione in Fortran 77. Mediante questo primo lavoro sono stati effettuati test per la calibrazione del modello nonché studi di sensitività.

Lo sviluppo del codice di ricerca descritto nei capitoli precedenti ha poi consentito di sfruttare appieno l'algoritmo di contatto realizzato, e i restanti modelli realizzati in questa tesi sono stati eseguiti mediante questo codice.

8.2 Implementazione in ABAQUS

Un primo approccio per lo studio del fenomeno di delaminazione nelle strutture rinforzate con FRP è stato eseguito utilizzando il codice ad elementi finiti ABAQUS. Il programma permette il cambiamento del suo funzionamento “base” grazie ad opportune subroutine che gli sviluppatori hanno messo a disposizione. Modificando queste “macro” e ricompilando il codice è possibile risolvere problemi che il codice non supporta nella sua configurazione standard. Sfruttando questa potenzialità è stata creata la subroutine UINTER per ottenere l’algoritmo di contatto descritto in (Salomoni & Mazzucco, 2011, 5-29, Mazzucco & Salomoni, 2011, 14-17).

Il modello numerico è stato testato attraverso dati sperimentali (Pellegrino & Tinazzi, 2008, 180-189) ottenuti su travetti in calcestruzzo soggetti ad azioni taglianti mediante prove di “*double shear*”.

Questa tipologia di test considera due prismi di calcestruzzo di dimensione 100×100×300mm collegati da due fasce di FRP poste su due facce opposte dei provini (Fig. 117). I prismi sono successivamente sottoposti ad un’azione di trazione fino al completo distacco del rinforzo.

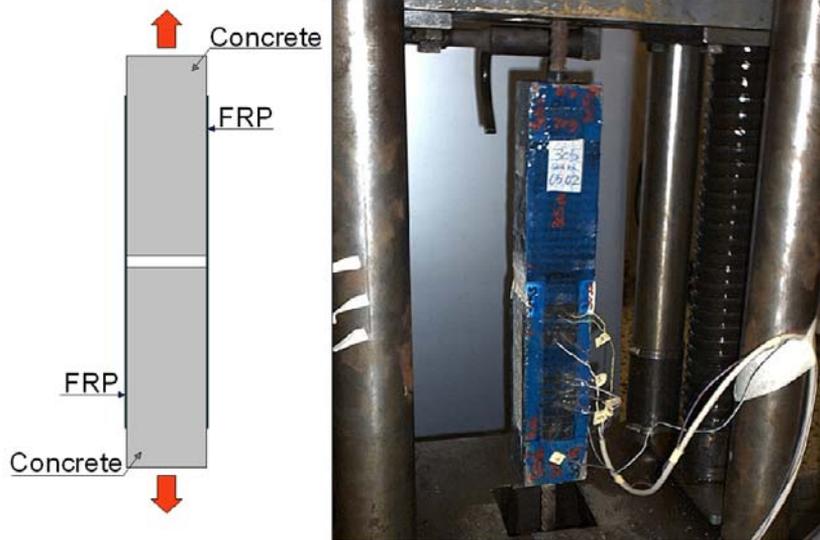


Fig. 117 Double Shear Test

Si è adottata una larghezza della fascia di FRP pari a 50mm. La fascia è disposta simmetricamente sulle due facce opposte del provino di calcestruzzo. La sperimentazione è stata condotta su una macchina a controllo di forza, con un incremento di carico pari a 150 N/sec., andando a misurare la deformazione in corrispondenza dell'asse longitudinale del rinforzo, mediante estensimetri monodirezionali. L'effettiva lunghezza di ancoraggio e i valori degli stress di taglio sono stati misurati mediante formule alle differenze finite considerando un modello monodirezionale (Pellegrino & Tinazzi, 2008, 180-189). Questa tipologia di test, (come del resto quelli a "single shear") sono rappresentativi di una condizione ultima

del rinforzo, quando la trave fessurata affida tutta la resistenza a flessione/trazione al collegamento di FRP (Fig. 118).

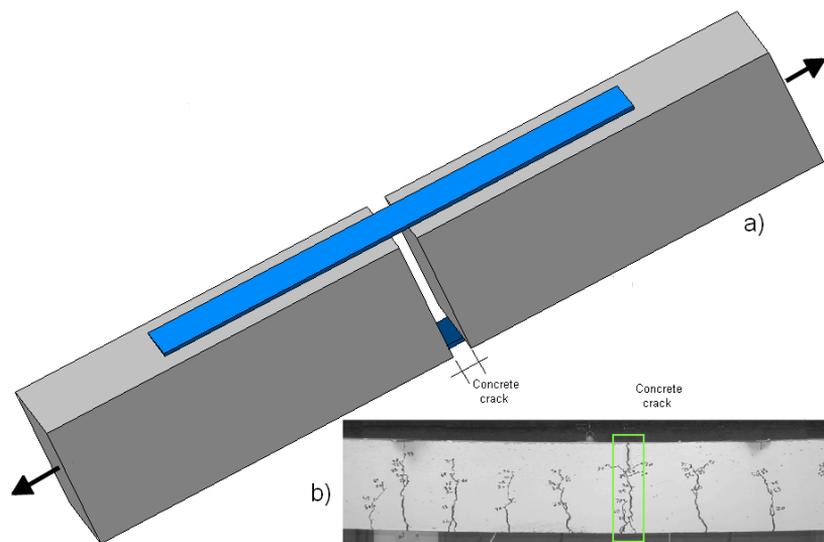


Fig. 118 Condizione di post fessurazione ricreata mediante la prova a "double shear"

Numericamente il test è stato ricreato mediante modelli tridimensionali che sfruttano i due piani di simmetria presenti nei provini (Fig. 119). I modelli sono stati realizzati attraverso elementi tetraedrici a 4 nodi isoparametrici per la rappresentazione del prisma in calcestruzzo; mentre la rappresentazione dei fogli di FRP è stata affidata ad elementi shell triangolari isoparametrici a 3 nodi.

Il modello costitutivo per i prismi in calcestruzzo utilizza una legge elasto-plastica di Drucker-Prager, mentre agli elementi di FRP si è associato un modello elastico lineare, essendo notoriamente il limite di snervamento di questi materiali molto superiore alla resistenza del collegamento e quindi non raggiungibile nel test.

L'algoritmo di contatto utilizzato per descrivere il processo di delaminazione è del tipo "surface to surface". Nell'ambito di tale algoritmo è stata implementata la legge di danneggiamento riportata nei precedenti capitoli.

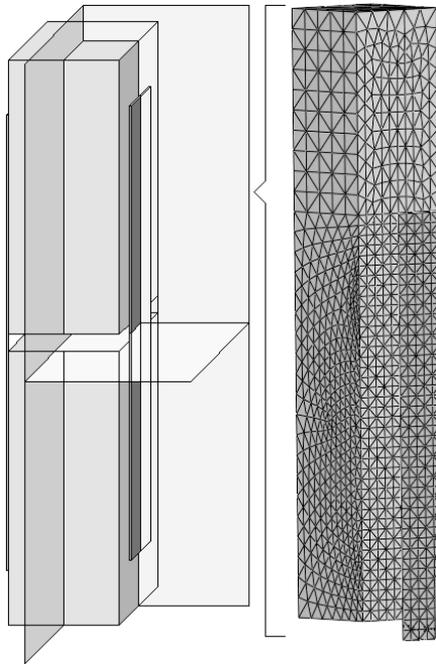


Fig. 119 Condizioni di simmetria adottate sui modelli numerici

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

La procedura di risoluzione del problema è di tipo iterativa incrementale e utilizza lo schema di Newton-Raphson. Si sono impiegati 260 step con incrementi minimi pari allo 0.001% del carico totale applicato.

La calibrazione dei parametri di danneggiamento è stata effettuata in accordo con i risultati sperimentali ottenuti.

Le caratteristiche dei materiali impiegati nonché i valori dei parametri dei modelli di Mazars sono riportati in Tab. 35.

	<i>Concrete</i>	<i>FRP</i>	<i>Contact Zone</i>
<i>Elastic modulus [MPa]</i>	47700.0	230000.0	3034.0
<i>Poisson's coefficient</i>	0.2	0.3	0.3
<i>width [mm]</i>	100.0	50.0	—
<i>height [mm]</i>	100.0	—	—
<i>length [mm]</i>	600.0	400.0	—
<i>thickness [mm]</i>	—	0.495	1.1
<i>f_c [MPa]</i>	58.0	—	—
<i>A (Mazars' parameter)</i>	—	—	1.0
<i>B (Mazars' parameter)</i>	—	—	55.0
<i>K₀ (Mazars' parameter)</i>	—	—	0.0012

Tab. 35 Caratteristiche meccaniche dei materiali

Lo spessore t_a della zona in contatto si è assunto pari a 1.1mm.

Il massimo carico applicato per ottenere la completa delaminazione del provino è risultato pari a 26kN.

8.2.1 Confronto Numerico Sperimentale

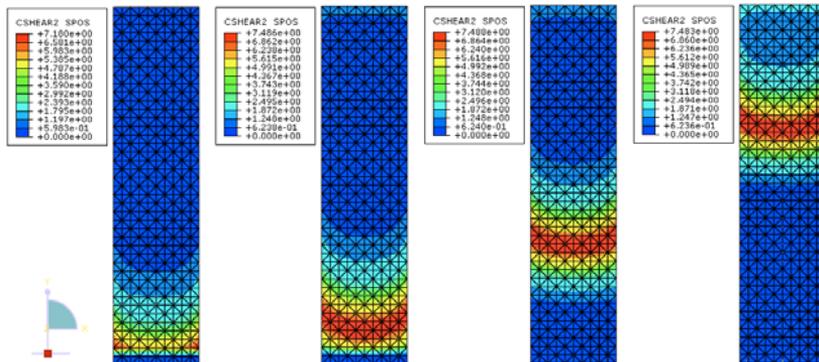


Fig. 120 Da sinistra a destra: Mappe delle tensioni tangenziali di interfaccia al 40%, 50% 68%, 95% del carico massimo

In Fig. 120 sono riportate le mappe di tensione all'interfaccia ottenute mediante il modello tridimensionale adottato, all'aumentare del carico applicato. Si nota che fino al 40% del carico applicato le tensioni crescono linearmente; man mano che il carico cresce, il massimo tensionale inizia a spostarsi verso l'interno fino al raggiungimento del picco massimo di tensione, limite di resistenza corrispondente a circa il 50% del carico totale applicato. All'aumentare ulteriore del carico si innesca il processo di delaminazione fino al completo distacco dell'FRP. La zona delaminata risulta visibile nelle mappe al 68% e al 95% del carico applicato, dove il fronte tensionale procede verso l'interno avvicinandosi via via alla fine del foglio di FRP, mentre la zona delaminata raggiunge un valore di tensione tangenziale di interfaccia nullo.

La distribuzione degli stress in un punto dell'interfaccia al crescere del carico risulta essere di tipo elasto-softening come mostrato in Fig. 121,

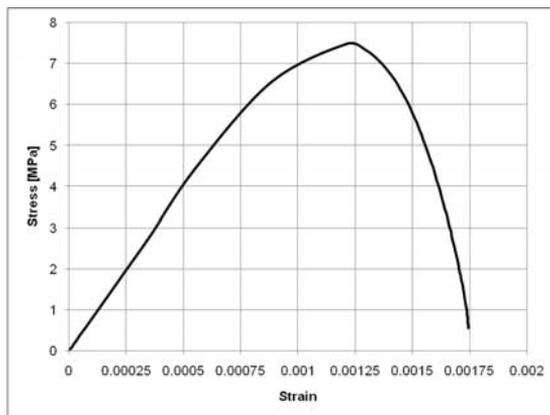


Fig. 121 Curva tensione-deformazione nella zona di interfaccia al crescere del carico

dove il ramo di softening corrisponde al danneggiamento dell'interfaccia.

I dati numerici sono stati confrontati con quelli ottenuti dalla sperimentazione. Il confronto è stato eseguito considerando punti nella sezione media dell'FRP (rispetto alla direzione longitudinale del provino), in corrispondenza degli estensimetri (Fig. 117).

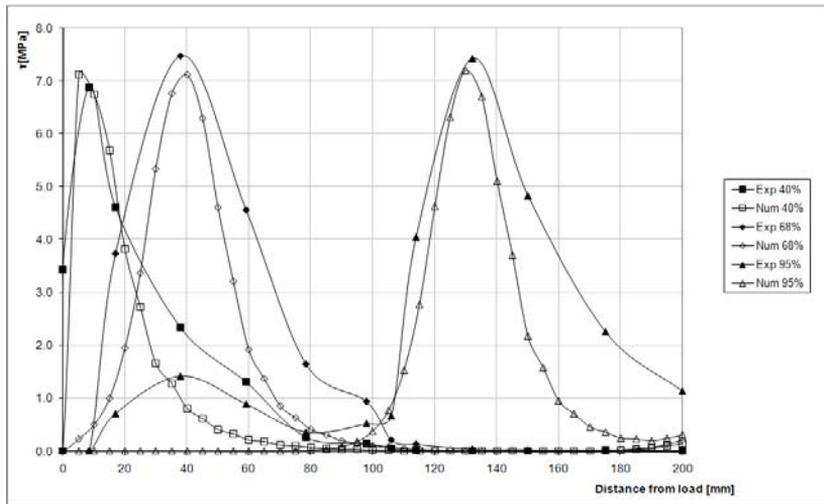


Fig. 122 Confronto Numerico - Sperimentale degli stress di taglio lungo il rinforzo in corrispondenza al 40%, 68% e il 95% del carico massimo applicato.

La Fig. 122 riporta l'andamento dello stress di taglio all'interfaccia lungo il rinforzo. L'ascissa 0 corrisponde all'inizio del provino mentre i 200mm coincidono con la fine del foglio di FRP. I risultati hanno rivelato che il modello numerico è in grado di cogliere i picchi di tensione nelle varie fasi della delaminazione. Le curve numeriche hanno rilevato una pendenza minore rispetto a quelle sperimentali ottenendo una larghezza di ancoraggio del rinforzo minore. Per larghezza di ancoraggio si intende la distanza tra l'inizio della curva, tensione tangenziale - posizione, al punto in cui le tensioni si esauriscono e raggiungono lo 0. Una possibile spiegazione dello scostamento di pendenza tra curve numeriche e sperimentali si può attribuire al fatto che i valori sperimentali sono valori *derivati* dalle deformazioni, lette attraverso gli estensimetri monodirezionali mediante l'impiego di un modello 1D alle differenze finite (Pellegrino & Tinazzi, 2008, 180-189) la cui equazione risulta:

$$\tau(z_i) = \frac{1}{2} n_f t_f E_f \left(\frac{\varepsilon_i^s - \varepsilon_{i-1}^s}{z_i - z_{i-1}} + \frac{\varepsilon_{i+1}^s - \varepsilon_i^s}{z_{i+1} - z_i} \right) \quad (8.1)$$

dove: n_f rappresenta il numero di strati di fibra, t_f lo spessore del singolo strato, E_f il modulo elastico. I valori ε_i^s corrispondono alla lettura di deformazione dello strain-gauge i-esimo posto ad una distanza z_i dal bordo del provino.

Come è stato spiegato nei capitoli precedenti attraverso il confronto con il modello di Smith e Teng in (Smith & Teng, 2001, 857-871) gli effetti di bordo del modello 3D influenzano la pendenza della curva “tensione - posizione” essendo i modelli 1D non in grado di cogliere questo comportamento del collegamento.

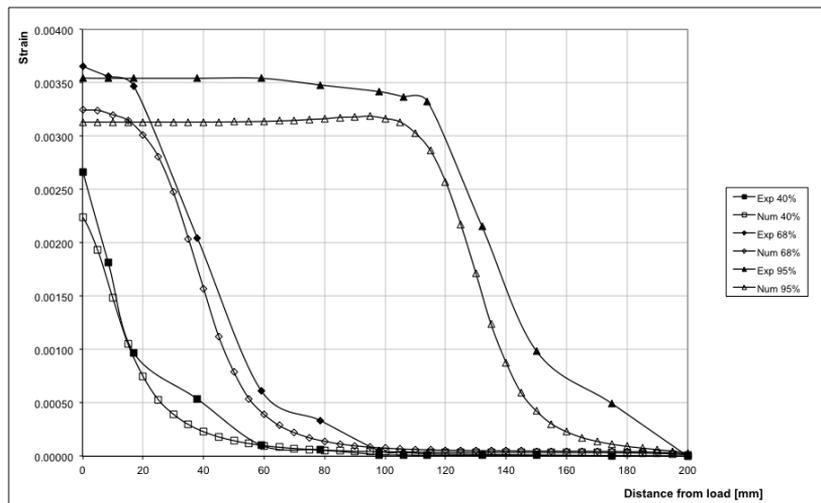


Fig. 123 Confronto Numerico - Sperimentale delle deformazioni lungo il rinforzo in corrispondenza al 40%, 68% e il 95% del carico massimo applicato.

In corrispondenza degli stessi punti e delle stesse percentuali di carico è ancora possibile vedere (Fig. 123) l'andamento delle deformazioni assiali nello strato di interfaccia. Dal grafico si nota che il tratto delaminato di FRP si comporta come un'asta soggetta a trazione pura, poiché in ogni

punto si ottiene una deformazione costante. Da questo grafico possiamo vedere ancora come il modello numerico riesca a cogliere con buona approssimazione il comportamento reale del provino, essendo le deformazioni calcolate direttamente, e risentendo quindi degli effetti di bordo presenti nel provino come riportato in Fig. 124.

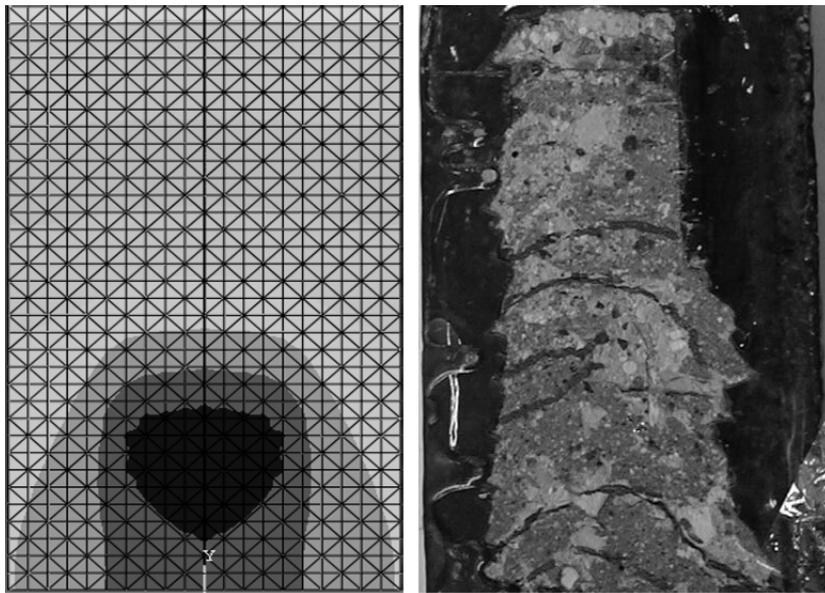


Fig. 124 Effetto ti bordo Numerico (Sx), Sperimentale (Dx)

Le curve di scorrimento sono state calcolate mediante la formula alle differenze finite:

$$s(z_i) = s(l_f) + \sum_{n=m}^i \frac{1}{2} (\varepsilon_{n-1}^s - \varepsilon_n^s) (z_{n-1} - z_n) \quad (8.2)$$

dove l_f è la lunghezza del foglio di FRP.

Il confronto numerico sperimentale riportato in Fig. 125 mostra un'ottima approssimazione del modello numerico al 40 e al 68% del carico applicato, mentre è presente uno scostamento della curva al 95% del carico.

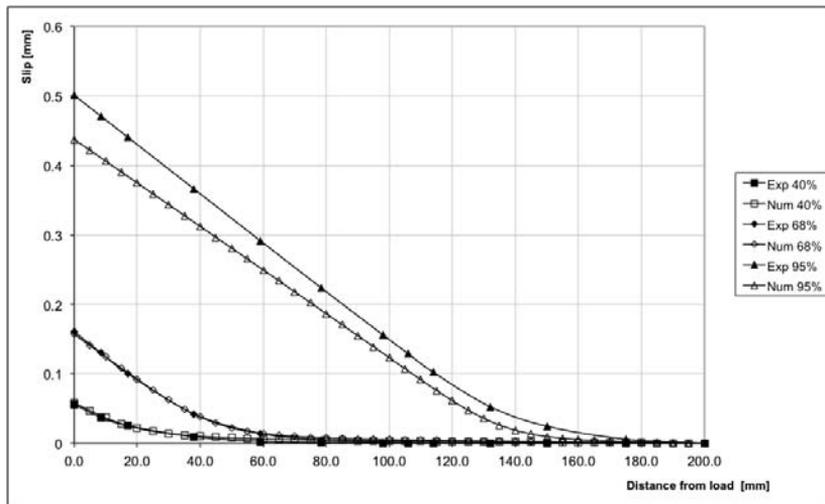


Fig. 125 Confronto Numerico - Sperimentale degli scorrimenti lungo il rinforzo sotto il 40%, 68% e il 95% del carico massimo applicato.

La variazione di risultati tra la curva numerica e sperimentale al 95% del carico applicato è spiegabile considerando che, a questo livello di sollecitazione, il provino risulta essere quasi completamente delaminato. La connessione all'elemento di calcestruzzo si realizza solo mediante un piccolo lembo di fibra. In queste condizioni gli estensimetri non riescono a riportare una lettura ottimale a causa delle violente variazioni di sollecitazione ed eventuali movimenti del provino rispetto all'asse di carico.

8.2.2 Effetti di bordo

Come descritto nei capitoli precedenti, l'utilizzo di modelli tridimensionali ha consentito di determinare una distribuzione più realistica delle tensioni tangenziali sulla superficie di interfaccia, le quali non risultano costanti, bensì assumono un andamento parabolico il cui massimo si presenta nella parte centrale della fibra (v. Fig. 124). Questo comportamento è stato osservato e studiato anche sperimentalmente da vari autori (Pellegrino & Tinazzi, 2008, 180-189, Subramaiam & Carloni, 2007, 578-594).

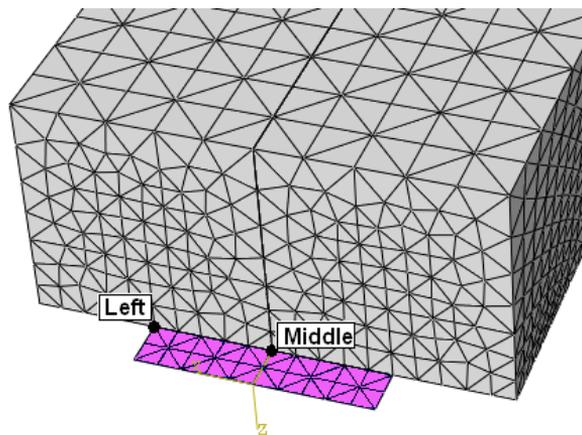


Fig. 126 Punti di controllo per la valutazione degli effetti di bordo

Per controllare la variazione di tensione nel modello ad elementi finiti sono stati considerati due punti all'interfaccia (Fig. 126), uno in mezzeria e uno su un lato, a metà della sezione trasversale.

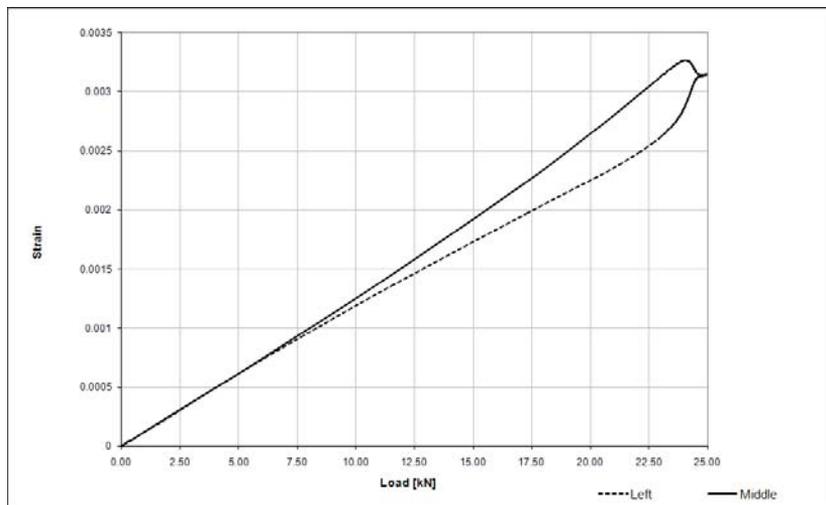


Fig. 127 Tensione tangenziale vs. carico applicato nei punti in mezzeria e laterale dell'FRP

Su questi due punti è stato tracciato il diagramma tensione tangenziale - carico applicato (Fig. 127). Lo scostamento delle curve indica che, a parità di carico applicato, in mezzeria (curva continua) la tensione risulta più alta rispetto a quella delle estremità laterali della fascia di FRP (curva

tratteggiata). Il massimo scostamento di tensione tra mezzeria e bordo risulta del 12.5%. Verso fine analisi il processo di delaminazione si avvia e questo comporta il progressivo distacco della fibra, con conseguente riavvicinamento delle curve. Avvenuto il distacco completo il tratto di FRP delaminato risulta soggetto ad una trazione pura e ad uno stato tensionale costante su tutta la sezione, come si può osservare nell'ultima parte di Fig. 127, dove infatti le due curve si incontrano assumendo un unico valore.

Da queste osservazioni si deduce che l'utilizzo di modelli 2D in stato piano di tensione potrebbero non stimare correttamente lo stato tensionale medio del rinforzo FRP-calcestruzzo.

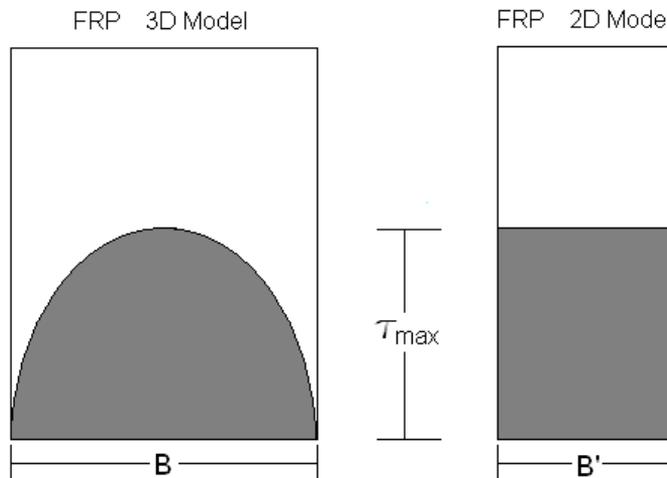


Fig. 128 Schema di integrazione

Per ottenere un modello 2D che associ la stessa forza applicata all'interfaccia e il picco massimo di tensione del collegamento, si può calcolare una larghezza di FRP equivalente B' da associare all'elemento di FRP nei modelli in stato piano di tensione.

La larghezza equivalente B' si può ricavare osservando lo schema di Fig. 128 e imponendo l'uguaglianza della forza risultante applicata nei due schemi:

$$\int_0^B \tau ds = \tau_{\max} \cdot B' \quad (8.3)$$

Si ottiene quindi:

$$B' = \frac{1}{\tau_{\max}} \int_0^B \tau ds \quad (8.4)$$

La riduzione stimata B'/B risulta pari a circa il 7%, essendo B la larghezza reale di fibra.

8.2.3 *Dipendenza dalla mesh (Mesh Sensitivity)*

Per confermare l'indipendenza dell'algoritmo di contatto associato al danneggiamento, dalla mesh, sono stati realizzati diversi modelli del test a "double shear" andando a modificare sia il numero di elementi finiti che la tipologia di elementi, mantenendo però gli stessi parametri dei materiali e le condizioni al contorno assegnate; si sono quindi confrontati in successione i risultati.

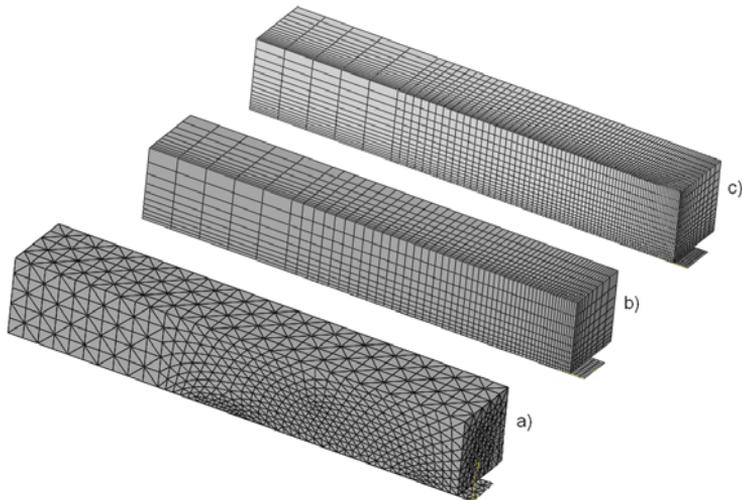


Fig. 129 Mesh adottate per l'analisi di sensitività.

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

Sono state impiegate tre mesh (Fig. 129) caratterizzate da:

- (a) 4734 nodi, 20744 elementi tetraedrici a 4 nodi e 420 elementi triangolari a 3 nodi
- (b) 7568 nodi, 5500 elementi esaedrici a 8 nodi e 600 elementi quadrilateri a 4 nodi
- (c) 21072 nodi, 22975 elementi esaedrici a 8 nodi e 1500 elementi quadrilateri a 4 nodi.

Come detto precedentemente, a tutti i modelli sono state assegnate le stesse condizioni di vincolo e di carico, andando a valutare i risultati ottenuti nelle varie fasi di carico.

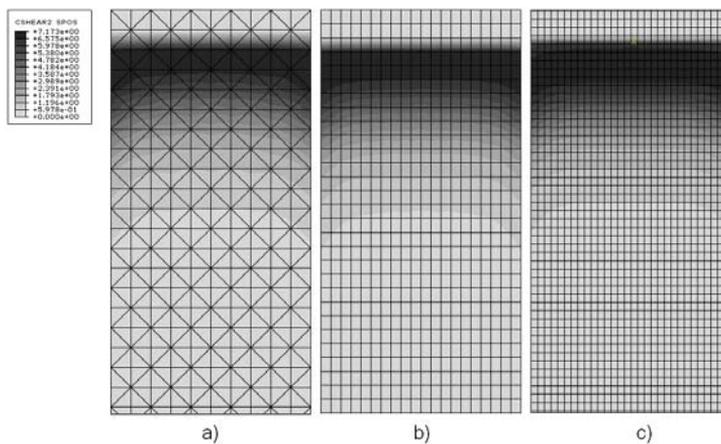


Fig. 130 Andamento delle tensioni trasversali nel confronto di sensitività.

In Fig. 130 è riportata la mappa delle tensioni tangenziali al 50% del carico massimo applicato nei tre differenti modelli. Sia l'andamento delle tensioni che gli effetti bidimensionali di bordo risultano pressoché identici come mostrato anche in Fig. 131, in cui si riporta alla stessa percentuale di carico l'andamento delle tensioni tangenziali rispetto alla posizione all'interfaccia.

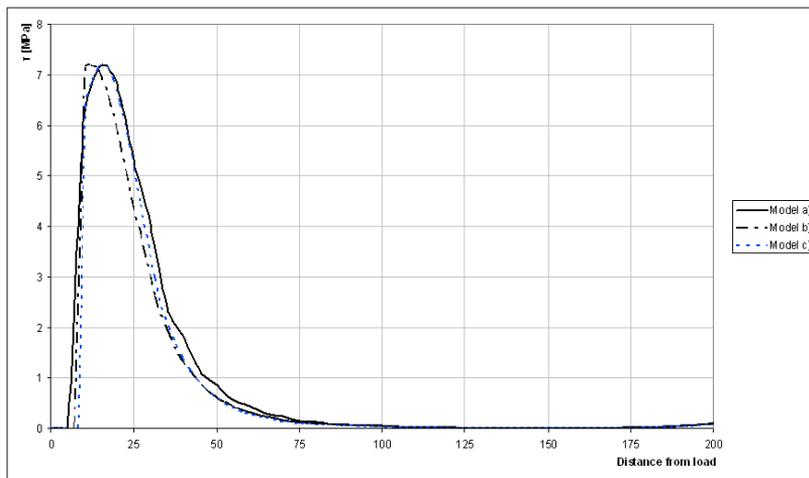


Fig. 131 Curve tensioni tangenziali vs. posizione dei modelli di sensitività.

8.3 Modelli numerici di creep

Gli esempi numerici sviluppati per la calibrazione del modello di creep sono stati sviluppati mediante il codice di ricerca ad elementi finiti descritto nei precedenti capitoli, tenendo conto delle prove sperimentali condotte su travetti in semplice appoggio caricati mediante due carichi simmetrici concentrati, come descritto nel capitolo sulla sperimentazione eseguita.

La simulazione del comportamento a lungo termine impiega il modello di creep B3 (Bazant & Baweja, 2000, 1-83) in corrispondenza degli elementi finiti che rappresentano il travetto in calcestruzzo, mentre la funzione di creep per gli elementi di FRP è stata sviluppata mediante modelli costitutivi micromeccanici (Ascione & Berardi, 2006, 7-10).

8.3.1 Caratteristiche geometriche

Grazie alla doppia simmetria dei travetti e delle condizioni di carico, il modello simula $\frac{1}{4}$ del test. Le condizioni al contorno rispecchiano le simmetrie imposte (Fig. 132). Nella sperimentazione il carico è stato applicato mediante “barre di carico” collegate da molle ad un traverso rigido, che a sua volta scaricava nel travetto due azioni concentrate costanti nello spessore del provino, attraverso elementi semicilindrici applicati ad una distanza di 5cm dalla mezzeria (i due carichi concentrati risultavano quindi ad una mutua distanza di 10cm v. Cap. 6). Numericamente il carico è stato assegnato mediante carichi nodali.

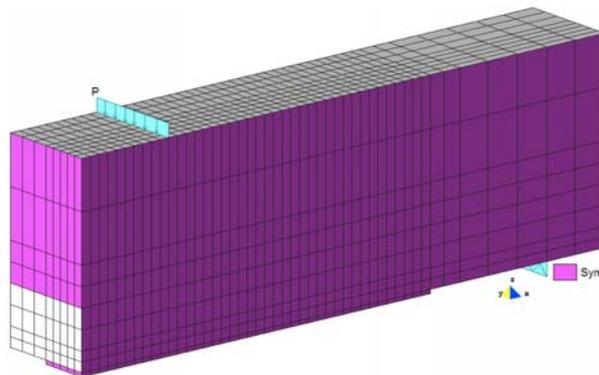


Fig. 132 Condizioni al contorno assegnate al modello numerico

Le condizioni di umidità ambientale sono state ricavate considerando la media dell'umidità rilevata nella camera di prova in cui sono stati collocati i provini, con un valore del 45.3%.

I travetti in calcestruzzo impiegati per il test sono stati stagionati per circa 3 anni. Si può presumere che dopo questo periodo dal getto, tenendo anche conto delle dimensioni ridotte dei provini (infatti il rapporto volume del travetto su superficie immersa nell'ambiente è pari a $v/s = 25$), l'umidità interna fosse in equilibrio con quella ambientale. Questa ipotesi trova rispondenza nel modello B3 che, per un'età pari a 3 anni, assume un valore di umidità interna pari a quella ambientale. Come si può osservare in Fig. 133 il modello B3 necessita di circa 20 giorni per portare all'equilibrio igrometrico il provino di calcestruzzo.

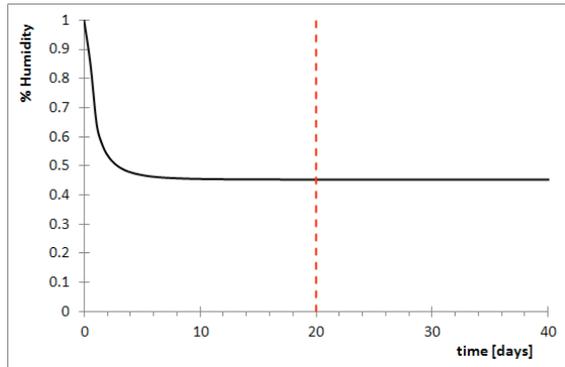


Fig. 133 Tempo necessario per il raggiungimento dell'equilibrio igrometrico per un provino con un rapporto $v/s = 25$

Nello studio dei fenomeni differiti questo comporta che l'effetto di drying creep (C_d) sia esaurito, essendo questo termine dovuto al gradiente di umidità della pasta cementizia. Gli effetti differiti dell'elemento in calcestruzzo sono quindi attribuibili alla sola componente di basic creep (C_0).

Il calcestruzzo impiegato per il test è stato realizzato considerando un contenuto di cemento pari a 450kg/m^3 , un rapporto acqua - cemento di 0.5 e un contenuto di aggregato pari a 1725kg/m^3 . I modelli numerici realizzati considerano un tempo di inizio del drying pari a $t_0 = 1$ giorno, mentre quello di inizio di applicazione del carico è pari a $t' = 1080$ giorni (il valore di inizio carico della sperimentazione).

I coefficienti n ed m dei materiali del modello B3 sono stati assegnati rispettivamente pari a 0.1 e 0.5 mentre al coefficiente k_s è stato attribuito il valore 0.1.

Le caratteristiche viscoso del materiale FRP sono state assegnate considerando il modello micromeccanico (Ascione & Berardi, 2006, 7-10) i cui parametri sono stati definiti, mediante la sperimentazione sulla resina descritta nei capitoli precedenti, con prove monoassiali di trazione. È stato assunto uno spessore totale del rinforzo pari allo spessore medio misurato di 1.0mm; all'interno di tale spessore si presume sia collocato uno strato di fibre di carbonio monodirezionali di spessore 0.165mm. Il rimanente strato di 0.835mm è costituito dalla sola matrice epossidica. La percentuale volumetrica di resina è quindi risultata pari a $\%V_m = 83.50\%$ mentre la percentuale volumetrica di fibra risulta di $\%V_f = 16.50\%$; valori

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

necessari per la determinazione della funzione di creep omogeneizzata assegnata al rinforzo.

I modelli sono stati realizzati con elementi brick a 20 nodi, descritti nei capitoli precedenti nel dettaglio, mentre l'interfaccia del composito FRP calcestruzzo è stata realizzata con superfici di contatto assumendo uno spessore medio della scabrezza del collegamento pari a 0.5mm.

t_0	1	days
Rh	45.3	%
C	450	kg/m^3
W	225	kg/m^3
A	1725	kg/m^3
f_{cm}	21.58	MPa
N	0.1	
M	0.5	
v/s	25	mm
k_s	0.1	
ϵ_{sh^∞}	0.05	

Tab. 36 Caratteristiche viscoso e meccaniche del calcestruzzo impiegato

8.3.2 Risultati numerici

Partendo dai dati relativi alla prima prova sperimentale in oggetto, sono state confrontate le deformazioni lette nella sperimentazione dei singoli estensimetri con le deformazioni lette nel modello in corrispondenza della superficie esterna del rinforzo (nella posizione di incollaggio degli estensimetri).

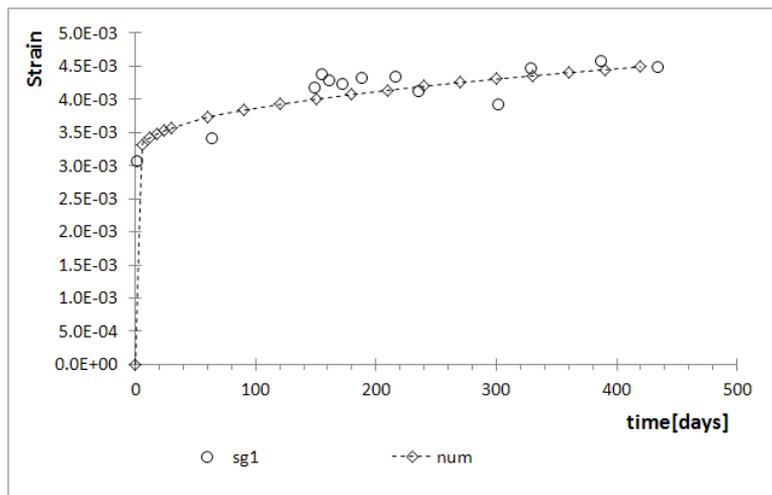


Fig. 134 Confronto numerico - sperimentale della deformazione nel tempo, in corrispondenza della posizione dell'estensimetro 1

Le curve deformazione - tempo qui riportate hanno permesso di determinare se il modello numerico fosse in grado di rappresentare gli effetti differiti su un composito FRP-calcestruzzo, mediante le leggi elasto-viscose implementate.

In Fig. 134 è mostrato il confronto tra il modello numerico e il primo strain gauge posto in prossimità della fessura preconstituita del provino. Questo estensimetro risulta essere quello più sollecitato essendo posto nella sezione con sollecitazione di flessione massima. In Fig. 135 è riportato il confronto tra deformazioni numeriche e sperimentali lette nel secondo estensimetro posto a 1cm dal primo.

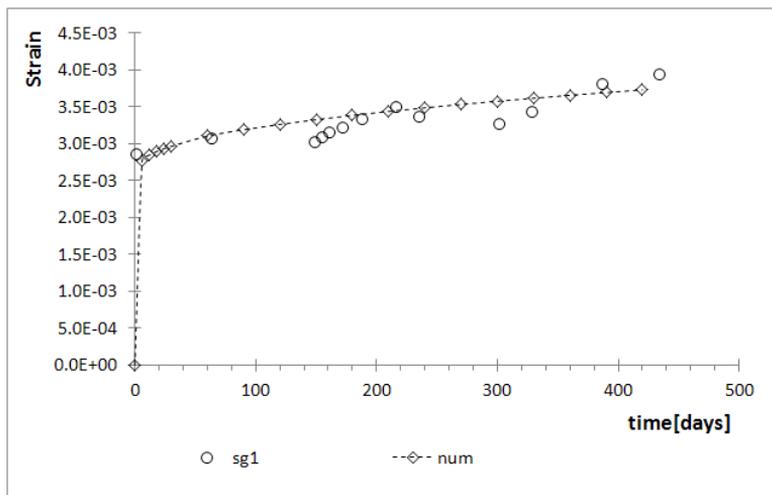


Fig. 135 Confronto numerico - sperimentale della deformazione nel tempo, in corrispondenza della posizione dell'estensimetro 2

Allo stesso modo, sono stati confrontati i dati degli estensimetri 3 e 4, i cui diagrammi sono riportati in Fig. 136.

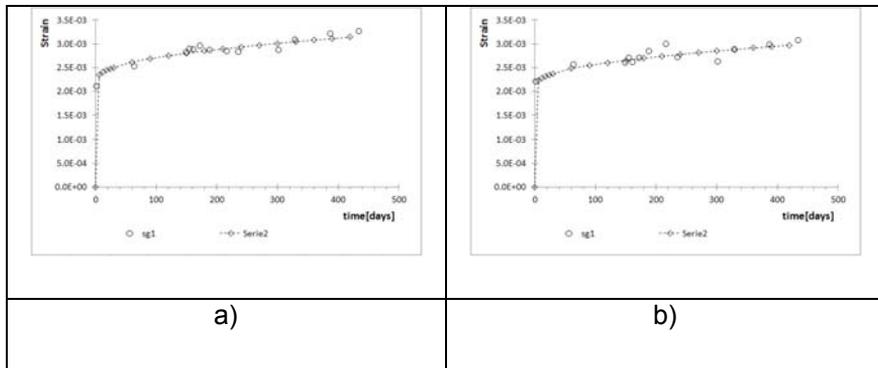


Fig. 136 Confronto numerico - sperimentale della deformazione nel tempo, in corrispondenza della posizione dell'estensimetro 3 a) e dell'estensimetro 4 b)

Allontanandosi sempre più dalla mezzeria del travetto, le deformazioni nell'FRP diminuiscono (l'esaurimento delle deformazioni avviene compatibilmente con la lunghezza di ancoraggio del rinforzo) come visibile dagli estensimetri 5 e 6 (Fig. 137).

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

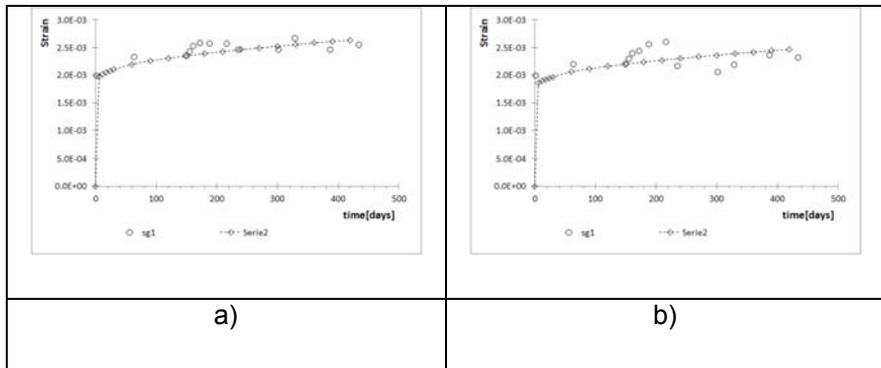


Fig. 137 Confronto numerico - sperimentale della deformazione nel tempo, in corrispondenza della posizione dell'estensimetro 5 a) e dell'estensimetro 6 b).

Dai diagrammi comparativi appena descritti si può notare che il modello numerico riesce a cogliere con buona approssimazione le misure di fonte sperimentale, andando a descrivere tutto il processo evolutivo nel tempo dovuto agli effetti differiti.

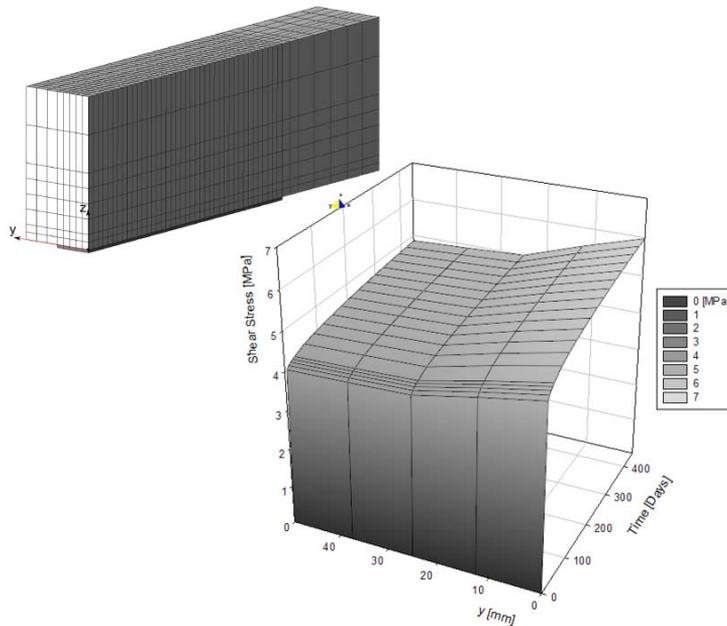


Fig. 138 Variazione degli stress tangenziali nel tempo, sulla superficie di interfaccia.

Dalle analisi numeriche effettuate si è constatato come gli stress tangenziali sulla superficie di interfaccia calcestruzzo - FRP aumentino nel tempo a causa degli effetti differiti. In Fig. 138 Variazione degli stress tangenziali nel tempo, sulla superficie di interfaccia. lungo una sezione trasversale dell'interfaccia (l'asse y), dove per $y = 0$ si intende la mezzeria del collegamento FRP - calcestruzzo.

8.4 Trave precompressa mediante fogli in FRP.

La tecnica di precompressione di travi in calcestruzzo mediante lamine di FRP consiste nel dare una trazione alla lamina prima di effettuare la solidarizzazione alla struttura mediante impregnazione con la matrice polimerica. La lamina viene tesa mediante opportuni dispositivi e successivamente incollata.

In questa sede è stato effettuato un semplice test per controllare le potenzialità del codice realizzato andando a vedere se fosse possibile studiare numericamente il processo di precompressione, utilizzando la tecnica di aggiornamento della mesh legata all'algoritmo di contatto.

Sono stati considerati inizialmente 2 corpi staccati, la trave e la lamina di FRP. Alla lamina è stata assegnata una trazione mediante applicazione dei carichi. La distanza tra i due corpi era tale da non consentire all'algoritmo di contatto di definire coppie di contatto chiuse.

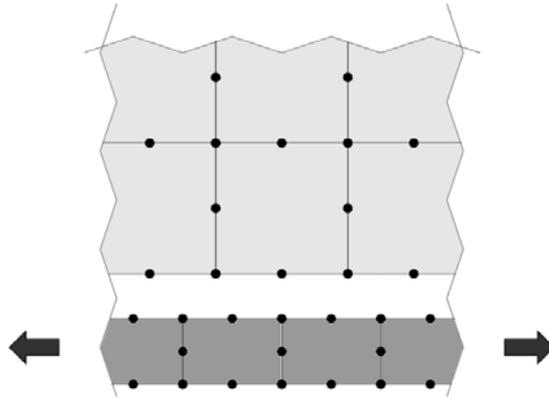


Fig. 139 Step 1, corpi separati senza trasferimento di sollecitazioni.

Si è ottenuta una condizione in cui i corpi risultano separati, con trave indeformata e lamina tesa, come mostrato in Fig. 139.

Risolto al primo step il problema di trave scarica ed FRP teso, si è dato origine a un secondo step, destinato a modificare la geometria della mesh, andando ad avvicinare la lamina di FRP alla trave di calcestruzzo. Questa procedura può avvenire grazie alla subroutine “*updateGeometry()*” all’interno della classe *cNode*.

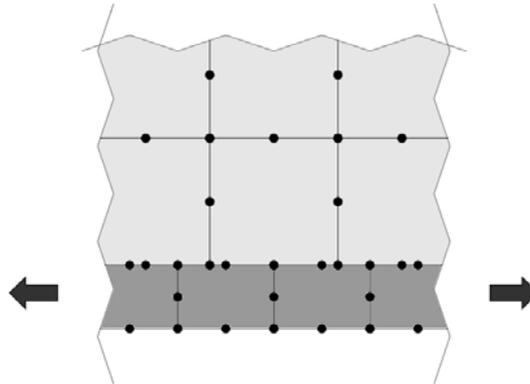


Fig. 140 Step 2, corpi connessi (contatto chiuso) senza trasferimento di sollecitazioni.

Questo secondo step ha consentito di chiudere il contatto della superficie di interfaccia FRP - calcestruzzo, senza trasferimento di sollecitazioni. Si ha quindi la condizione di corpi connessi (equivalente alla solidarizzazione FRP - calcestruzzo), con trave indeformata e lamina tesa (Fig. 140).

Si è quindi creato un terzo step per “rilasciare” il carico di precompressione della lamina, consentendo il trasferimento di sollecitazioni tra FRP e calcestruzzo andando quindi a precomprimere la trave.

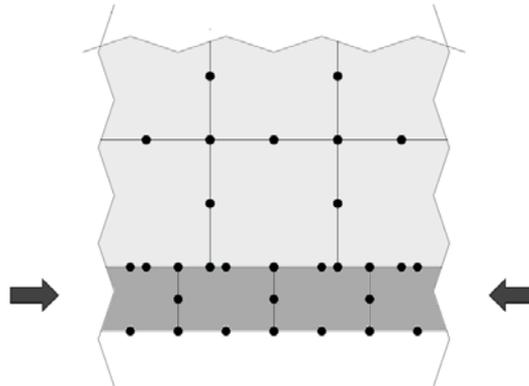


Fig. 141 Step 3, corpi connessi (contatto chiuso) con trasferimento di sollecitazioni.

La procedura sopra descritta è stata ricreata nel file di input riassunto in Box 25.

Il modello è composto da 684 nodi e 92 elementi brick a 20 nodi. Sono stati impiegati 20 elementi slave e 12 elementi master (Fig. 142).

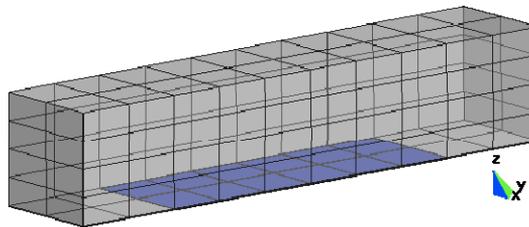


Fig. 142 Trave in semplice appoggio precompressa con la lamina di FRP.

La trave è stata vincolata per simulare il semplice appoggio, mentre gli elementi rappresentanti l'FRP presentano condizioni al contorno variabili, a seconda degli step precedentemente descritti. Nel primo step gli elementi FRP sono staccati dagli elementi che rappresentano la trave in calcestruzzo. Per evitare la labilità del sistema è stato necessario vincolare gli elementi di FRP, consentendo però la possibilità di allungarsi a causa del carico assiale applicato.

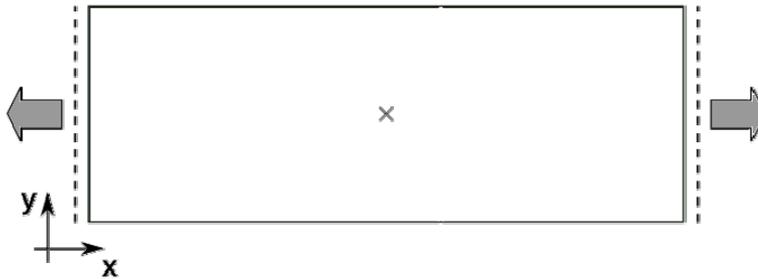


Fig. 143 Condizione di vincolo nell'FRP.

Nello step 1 l'FRP è stato vincolato come in Fig. 143. Agli estremi sono stati bloccati gli spostamenti (D_z , D_y) mentre grazie al carico simmetrico, (la trazione nella lamina) è stata vincolata la direzione D_x nei nodi della mezzeria. Nello step 2 la mesh viene spostata mediante la procedura di aggiornamento, della stessa andando a chiudere il contatto. Questo

permette di avere un sistema staticamente determinato togliendo tutte le condizioni al contorno nell'FRP, e lo stesso si ha per lo step 3.

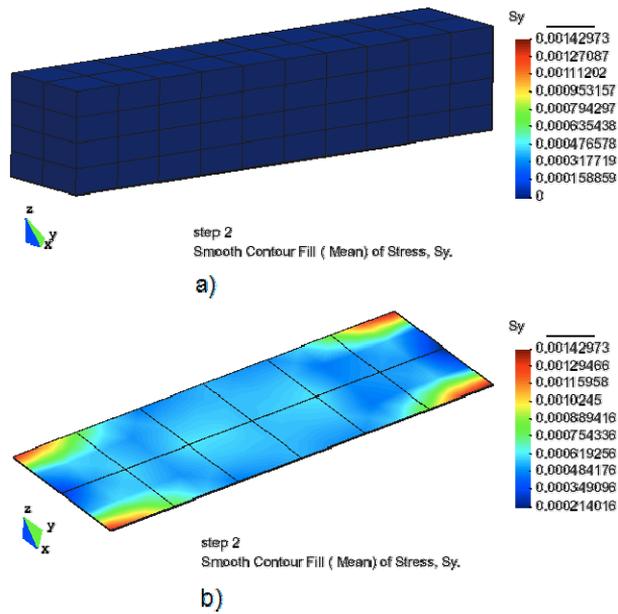


Fig. 144 Stress S_y alla fine dello step 1 per a) trave in calcestruzzo; b) lamina di FRP.

In Fig. 144 si riporta lo stato tensionale dei due componenti del composito ancora scollegati. Possiamo infatti vedere la trave scarica e la lamina di FRP soggetta ad un'azione di trazione.

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

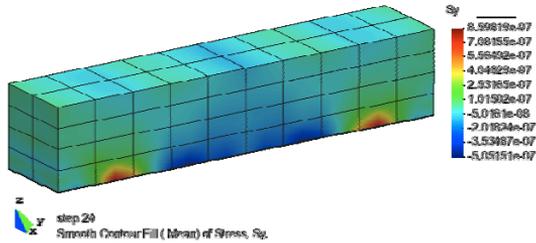


Fig. 145 Stato tensionale composito a fine analisi.

A fine analisi, con i componenti connessi, la trave viene precaricata e in Fig. 145 si può notare la compressione inferiore della trave; le zone inferiori in trazione sono dovute agli appoggi che ne impediscono la deformazione come visibile in Fig. 146 ove sono riportati gli spostamenti verticali (D_z) che si verificano nella trave in calcestruzzo a causa della flessione generata dalla precompressione data dalla lamina di FRP.

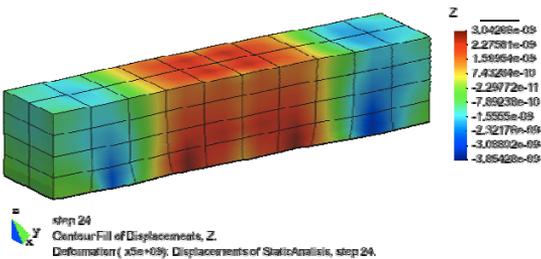


Fig. 146 Spostamenti D_z dei punti della trave precompressa.

Il modello consente ancora di visualizzare lo stato tensionale di interfaccia. Le tensioni tangenziali sono riportate in Fig. 147

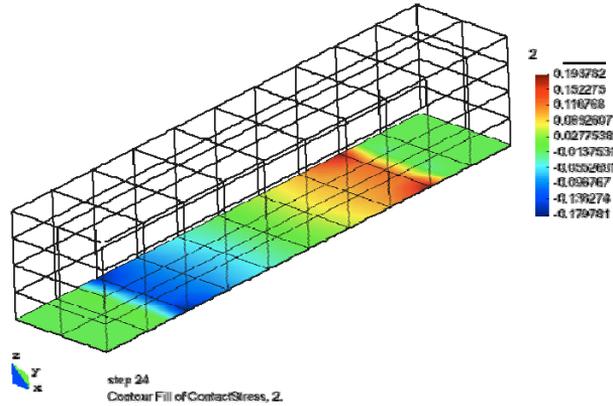


Fig. 147 Tensioni tangenziali di interfaccia.

Qui si nota la tensione non nulla in corrispondenza dell'incollaggio della lamina.

Durante il processo di precompressione l'FRP, inizialmente teso, si scarica andando a redistribuire le sollecitazioni alla trave. Lo scarico è visibile in Fig. 148.

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

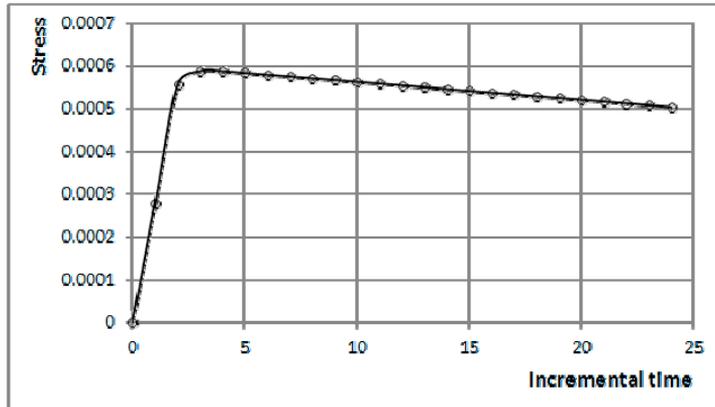


Fig. 148 Variazione degli stress nell'FRP durante il processo scarico della precompressione.

```
nodes
1 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
!...
! writed all coordinates
684 0.00E+00 3.75E+03 -4.00E+00
end

element
brick20TIM
1 15 16 3 17 34 36 37 35 139 147 155 163 140 148 156 164 171 175 179 183 1
!...
! writed all elements
brick20TIM
92 131 136 105 102 138 137 109 133 675 681 641 635 676 682 642 636 684 683 646 678 2
```

```

end
material
elasticlso
1 24700.0 0.1
end
material
elasticlso
2 280000.0 0.20
end
!-----contact
contactParameter
offset 0.5      !adhesive thickness
Elastic 27700.0 27700.0 27700.0
Mazars
  Ac 1.0        !mazars' parameter Ac in compression
  Bc 550.       !mazars' parameter Bc in compression
  At 1.0        !mazars' parameter At in tension
  Bt 550.       !mazars' parameter Bt in tension
  yieldstrainc 0.01
  yieldstraint 0.01
endMazars
end
master
1 86 87 88 89 90 91 92 93
!...
! writed all master sourface
12 131 102 105 136 133 109 137 138
end
slave
1 15 16 3 17 34 36 37 35
!...
! writed all slave sourface
20 30 31 33 12 82 51 85 84

```

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```
end
!-----endContact

!-----STEP1: FRP tension

step
time 0.5 1.0
maxIter 10
!-----solver Options

solver
! solver type |linear| or |nonlinear| or |transient|
solverType nonlinear
! matrix compress
compress y
! convergence tolerance for loads
loadToll 0.00001
! convergence tolerance for displacements
dispToll 0.00001
! options solver |iter or direct|
option use iter
! options |precision for iterative solver|
option precision 0.000001
! |precision max iterations for iterative solver|
option maxiter 100000
end
boundary
14 1 1 1 0.00 0.00 0.00
!...
! writetd all boundary conditions
683 0 0 1 0.00 0.00 0.00
end
load
```

```

104 1 0.00E+00 0.09E+00 0.00E+00
! writed all load conditions
683 1 0.00E+00 0.09E+00 0.00E+00
end
endStep

!-----STEP 2: update coordinates
step
time 0.5 1.0
maxIter 10

!update FRP coordinates
nodes
86 5.00E+02 1.50E+03 0.00E+00
!...
! update all FRP coordinates
684 0.00E+00 3.75E+03 -1.00E+01
end
! canghe boundary conditions in the FRP nodes
boundary
14 1 1 1 0.00 0.00 0.00
!...
! writed all bounsary conditions
683 0 0 0 0.00 0.00 0.00
end
endStep

!-----STEP 3: load relax
step
time 0.05 1.0
maxIter 10
!new load

```

ANALISI SPERIMENTALI E NUMERICHE DEL COMPORTAMENTO DI INTERFACCIA TRA FRP E CALCESTRUZZO

```
load  
104 1 0.00E+00 -0.09E+00 0.00E+00  
! writed all new load conditions  
683 1 0.00E+00 -0.09E+00 0.00E+00  
end  
endStep
```

Box 25 Input file per la rappresentazione di una trave precompressa.

9 CONCLUSIONI

Nei capitoli precedenti è stato studiato il comportamento di interfaccia tra FRP e calcestruzzo su strutture composite in calcestruzzo rinforzate esternamente da lamine o fogli in FRP, sia sotto carichi di breve durata che per azioni differite nel tempo, sviluppando un codice numerico di ricerca tridimensionale, basato sulla teoria degli elementi finiti.

La zona di giunzione tra i componenti è stata simulata attraverso la teoria del contatto associata al danneggiamento. Questo ha permesso di poter rappresentare l'intero processo di delaminazione dei fogli in FRP, corrispondente al raggiungimento del limite di resistenza del collegamento.

Il codice realizzato è stato testato sia mediante il confronto di formulazioni analitiche atte a descrivere lo stato tensionale deformativo di interfaccia in campo elastico (Smith & Teng, 2001, 857-871) tenendo conto delle tensioni tangenziali e di quelle normali (o di peeling) rispetto la superficie di incollaggio,

generalmente riconosciute come lo stato tensionale più gravoso agente nell'interfaccia; nonché attraverso il confronto di dati sperimentali per la caratterizzazione sia della lunghezza di ancoraggio delle fibre che del processo evolutive di delaminazione.

Considerando che il “debonding”, si verifica generalmente nello strato di calcestruzzo adiacente la zona di incollaggio e che esso risulta influenzato dai trattamenti superficiali eseguiti sulla faccia di calcestruzzo in cui si effettuata l'intervento (Iovinella, 2010, Toutanji & Ortiz, 2001, 457-462), è stato possibile giustificare l'assunzione di un modello di danno quale quello basato sulla teoria di Mazars per la definizione del comportamento di interfaccia.

L'impiego di modelli tridimensionali ha consentito di poter valutare gli “effetti di bordo”: una distribuzione non uniforme dello stato tensionale di interfaccia presente agli estremi del collegamento, fenomeno riscontrato anche sperimentalmente da diversi autori (Pellegrino & Tinazzi, 2008, 180-189, Subramaiam & Carloni, 2007, 578-594).

Si è voluto inoltre indagare il comportamento del rinforzo soggetto ad azioni differite nel tempo andando a confrontare i risultati numerici con una sperimentazione eseguita su travetti in semplice appoggio, sviluppata nell'ambito di questo lavoro di tesi presso il Dipartimento di Costruzioni e Trasporti dell'università di Padova.

Lo studio dei fenomeni “lenti” nel calcestruzzo ha considerato l'adozione del modello B3 (Bazant & Baweja, 2000, 1-83); considerando che il materiale FRP risulta essere esso stesso un composito formato da una

matrice polimerica e da fibre immerse, la funzione di creep assunta per tale materiale è stata rappresentata mediante un modello micromeccanico in grado di considerare l'influenza delle fibre nella matrice (Ascione & Berardi, 2006, 7-10).

Il codice ha dunque consentito di eseguire analisi di tipo lineare, non lineare (incrementale) per materiale, e transitorie; seppure realizzato per sviluppare analisi tridimensionali di fenomeni di delaminazione e di aderenza calcestruzzo-FRP anche a lungo termine, la sua struttura e applicabilità è risultata del tutto generale.

9.1 Sviluppi futuri

Come visto nell'ultimo esempio realizzato nel capitolo precedente, il codice ad elementi finiti sviluppato è in grado di rappresentare tutto il processo di precarico per travi precomprese mediante fogli in FRP. Il primo sviluppo di questo lavoro sarà quello di verificare mediante confronti sperimentali se l'algoritmo di contatto associato al danneggiamento riuscirà a simulare gli effetti di interfaccia per questa tipologia di strutture sia per carichi a breve che a lungo termine.

Come accennato nel capitolo inerente gli effetti differiti, le matrici polimeriche impiegati negli FRP risultano essere fortemente dipendenti

dalla temperatura. Potrebbe essere interessante studiare sia gli effetti differiti di questa tipologia di materiale al variare delle condizioni termiche per temperature ordinarie (basti pensare alle campate da ponte investite dai raggi solari nelle giornate estive, la temperatura anche se per un breve lasso di tempo nella vita dell'opera potrebbe essere sufficientemente elevata da modificare il comportamento del rinforzo). Un altro campo di ricerca possibile sempre legato alle problematiche termiche a cui questi compositi possono essere soggetti, sono gli effetti istantanei globali e nell'interfaccia nel caso di situazioni eccezionali quali gli incendi.

Definito compiutamente tutti gli aspetti legati all'interfaccia tra calcestruzzo ed FRP si potrà indagare sul comportamento globale di questi elementi, associando opportune leggi di danno sia al materiale calcestruzzo che all'FRP per poter simulare tutta l'evoluzione dello stato tensionale fino al collasso della struttura.

BIBLIOGRAFIA

A

Arutunian N. Kh., (1957), "*Applications de la théorie du fluage*", Eyrolles, Paris.

Ascione F., (2009), "*Ultimate behaviour of adhesively bonded FRP lap joint*", Comp.: part B, vol. 40, 107-115.

Ascione L., Berardi V.P., D'Aponte A., (2006), "*Un modello meccanico per lo studio del comportamento differito dei laminati compositi fibrorinforzati*", Colloquium Lagrangianum. 7 - 10 dicembre, pp. 1-10.

Ascione L., Feo L., (2000), "*Modeling of composite/concrete interface of RC beams strengthened with composite laminates*", Comp. part B, Vol. 31, pp. 535-540.

B

Bank L. C., (2006), "*Composites for Constructions: Structural Design with FRP Materials*", J. Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

Bazant Z., (1988), "*Mathematical modeling of creep and shrinkage of concrete*", John Wiley & Sons Inc., Chichester and New York.

Bazant Z., Baweja S., (1995) "*Justification and refinements of Model B3 for concrete creep and shrinkage: 1. Statistic and sensitivity*", Mat and Structures, vol. 28, 415-430.

Bazant Z., Baweja S., (2000), "*Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures: Model B3*", in Adam Neville Symposium: Creep and Shrinkage – Structural Design *Effects*, ACI SP-194, A. Al-Manaseer Ed., Am. Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 1–83.

Bazant Z., Murphy W. P., (1995) "*Creep and shrinkage prediction model for analysis and design on concrete structures – Model B3*", *Mat. And Structures*, vol. 28, 357-365.

Bazant Z., Wang T. S., (1985), "Practical prediction of cyclic humidity effect creep and shrinkage of concrete", *Materials and Structures*, Vol. 18-4, pp. 247-252.

Bazant Z.P., Wu S.T., (1974), "Rate-type Creep Law of Aging Concrete Based on Maxwell Chain", *Materials and Structures (RILEM)* vol 7, 45–60.

Belytschko T., Liu W. K., Moran B., (2001), "*Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*", J. Wiley & Sons, England.

Berardi V. P., Giordano A., Mancusi G., (2003) "Mocromodelli costitutivi per lo studio della viscosità nel placcaggio strutturale con FRP", *Atti XXXII Convegno AIAS*, Salerno.

Bruno D., Carpino R., Greco F., (2007), "*Modelling of mixed mode debonding in externally FRP reinforced beams*", *Comp. Sci. and Tech.*, Vol. 67, pp. 1459–1474.

C

Chen Y., Davalos J. F., Ray I., Kim H. Y., (2007), "*Accelerated aging tests for evaluations of durability performance of FRP reinforcing bars for concrete structures*" *Comp. Struct.*, vol. 78, 101-111.

D

Diab H., Wu Z., (2007), "*Nonlinear constitutive model for time-dependent behaviour of FRP-Concrete interface*", *Comp. Science and Technology*, vol. 67, 2323-2333.

E - F

Fedele R., Milani G., (2010), "*A numerical insight into the response of masonry reinforced by FRP strips. The case of perfect adhesion*", *Comp. Struc.*, Vol. 92, pp. 2345-2357.

Ferretti D., Savoia M., (2003), "*Non-linear model for R/C tensile members strengthened by FRP-plates*", *Eng. Frac.e Mech.*, Vol. 70, 1069–1083.

Ferracuti B., Savoia M., Mazzotti C., (2006), "*A numerical model for FRP–concrete delamination*", *Comp.: Part B*, Vol.37, pp. 356–364.

Findley W. N., (1987), "*Creep characteristic of plastics*", *Symposium on Plastics*, ASTM.

Fish J., Belytschko T., (2008), "*A First Course in Finite Elements*", J. Wiley & Sons, England.

Franciosi V., (1961), "*Le deformazione permanenti sotto carico costante nelle strutture in conglomerato cementizio*", *Rendiconti 1958/59 del Corso di perfezionamento per le costruzioni in c.a.*", Tamburini, Milano.

G

Gambolati G., (2002), "Lezioni di metodi numerici", Libreria cortina, Padova.

H

Hoffmann K., (1989), "*An Introduction to Measurements using Strain Gages*", Hottinger Baldwin. Messtechnik GmbH, Dramstadt.

Hutchinson J. M., (1995), "*Physical Aging of Polymers*", Prog. Polym. Vol. 20, 703-760.

I

Iovinella I., (2010), "*Influenza dei trattamenti superficiali sull'efficacia del rinforzo esterno in FRP*", Phd Thesis, University of Naples.

J - K

Kachanov L.M., (1958), "*Time of the rupture process under creep conditions*", Akad. Nauk SSR Otd. Tech. Nauk, Vol. 8, pp. 26-31.

L

Lemaitre J., (1971), "*Evaluation of dissipation and damage in metals submitted to dynamic loading*", Proc. I.C.M. 1, Kyoto, Ja.

Li G., Maricherla D., Singh K., Pang S. S., John M., (2006), "*Effect of fiber orientation on the structural behavior of FRP wrapped concrete cylinders*", Comp. Struc., Vol. 74, 475-483.

Liu Z., Zhu B., (1994), "*Analytical solutions for R/C Beams strengthened by externally bonded steel plate*", J. Tongji Univ. Vol. 22(1), pp. 21-26.

Li J., Weng G. J., (1995), "*Effect of a viscoelastic interphase on the creep and stress/strain behaviour of fiber-reinforced polymer matrix composite*", Comp. part B, vol. 27B, 589-598.

M

Majorana C.E., (1984), "Soluzione numerica di equazioni integrali di Volterra", Internal Report University of Padua.

Majorana C., Mazars J., (1997), "*Thermo-hygrometric and mechanical behaviour of concrete using damage models*", Mat. Ans Struc., Vol. 30, pp. 349-354.

Majorana C.E., Salomoni V.A., Mazzucco G., Khoury G.A., (2010), "*An approach for modelling concrete spalling in finite strains*", Mathematics and Computers in Simulation, vol. 80, 1694–1712.

Majorana C.E., Vitaliani R., (1990), "*Numerical modelling of creep and shrinkage of concrete by finite element method*", Proc. of the 2nd Int. Conf on Computer Aided Design of Concrete Structures, SCI-C 1990, Zell am See Austria, pp. 773-784.

Marfia S., Sacco E., Toti J., (2010), "*An approach for modeling of interface-body coupled nonlocal damage*", Frattura ed Ing. Strutturale, Vol. 12, pp. 13-20.

Maslov G. N., (1941), "*The thermostressed state in concrete masses with allowance for creep of concrete*", Izv. NIIG, 28.

Mazars J., (1986), "*A Description of Micro and Macroscale Damage of Concrete structures*", Eng. Frac. Mech, Vol. 25, 72.

Mazzucco G., Salomoni V.A., Majorana C.E., Pellegrino C., (2011), "*Three-dimensional modeling of bond behaviour between concrete and FRP reinforcement*", XIX Congresso Nazionale AIMETA, Sept. 14-17, Ancona.

McCrum N. G., Buckley C. P., Bucknall C. B., (1999) , "*Principles of Polymer Engineering*", Oxford Science Publications.

McKenna G. B., (1994), "*On the Physics Required for Prediction of Long Term Performange of Polymers and Their Composites*", J. Res. Of the National Ist. Of Standards and Tecnology, vol 99, 169-189.

Michelli F., Nanni A., (2004), "*Durability of FRP rods for concrete structures*", Cons. Build. Mater., vol 18, 491-503.

Migliacci A., (1971), "*Applicazioni dei principi di viscosità : Quaderni del corso di perfezionamento per le costruzioni in c.a.*", , Tamburini, Milano.

Monti G., Renzelli L., Luciani P., (2003) "*FRP Adhesion to Uncracked and Cracked Concrete Zones*", 6th Int. Symposium on FRP Reinforcement for Concrete Structures. July. Singapore.

N

Niu H., Wu Z., (2001), "*Interfacial Debonding Mechanism Influenced by Flexural Cracks in FRP-strengthened Beams*", J. Struc. Eng., Vol 47A, pp. 1277-1288.

Nowacki W.,(1965) "*Teorie du fluage*", Eyrolles, Paris.

O - P

Pantelides C.P., Romero P., Reaveley L.D., (2010), "*Rehabilitation of splice connections of wood trusses with FRP composites*", Const. and Building Mat., Vol. 24, 37-45.

Pellegrino C., Modena C., (2008), "*An experimentally based analytical model for the shear capacity of FRP-Strengthened reinforced concrete beams*", Mech. of Comp. Mat., Vol. 44-3, 231-244.

Pellegrino C., Tinazzi D., Modena C., (2008), "*Experimental study on Bond Behavior between Concrete and FRP reinforcement*", J. Compos. for Constr.,vol 12(2), 180-189.

Popov V. L., (2010), "Contact Mechanics and Friction Physical. Principles and Applications", Springer Verlag Berlin.

Q – R - S

Salomoni V. A., Mazzucco G., Pellegrino C., Majorana C. E., (2010), "*Three-dimensional modelling of bond behaviour between concrete and FRP reinforcement*", Engin Comp., Vol. 28(1), pp. 5-29 doi 10.1108/02644401111096993.

Savoia M., Ferretti D., Mazzotti C., (2002), "Creep behavior of RC tensile elements retrofitted by FRP plates", ICCI '02 Conference Proceedings, San Francisco, San Francisco.

Scott D. W., Zureick A. H., (1998), "Compression Creep of a pultruded E-Glass vinylester composite", Comp. Science Technology, vol 58, 1361-1369.

Smith S.T., Teng J.G., (2001), "*Interfacial stresses in plate beams*", Eng. Struc., Vol. 23, pp. 857-871.

Spoelstra M. R., Monti G., (1999) "*FRP-Confined Concrete Model* ", J. Compos. for Constr. Volume 3, Issue 3, pp. 143-150.

Subramaiam K. V., Carloni C., Nobile L., (2007), "*Width effect in the interface fracture during shear debonding of FRP sheets from concrete*", Eng. Frac. Mech., vol. 74, 578-594.

T

Toutanji H., Ortiz G., (2001), "*The effect of surface preparation on the bond interface between FRP sheets and concrete members*", Comp. Struc., vol. 53, 457-462.

Trost H., (1966), "*Spannung – Dehnungs – Gesetz eines viskoelastischen Festkörpers wie Beton und Folgerungen für Stabtragwerk aus Stahlbeton und Spannbeton*", Beton, vol 6, pag 233.

U

UNI EN 12390-1, (2000), "Testing hardened concrete - Shape, dimensions and other requirements for specimens and moulds", Ente Nazionale Italiano di Unificazione, ICS 91.100.30.

V - W

Wriggers P., (2006), "Computational Contact Mechanics", Springer Verlag Berlin.

Wu Z., Niu H., (2000), "Study on Debonding Failure Load of RC Beams Strengthened with FRP Sheets", J. Stric. Eng. Vol. 46A, pp. 1431-1441.

X

Xotta G., Salomoni V.A., Majorana C.E., (2010) Creep and Shrinkage Analysis of Concrete at Meso Scale, GIMC 22-24 September, Siracusa IT.

Y - Z

Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., (2000), "The Finite Element Method, The Basis", Butterworth-Heinemann, Oxford, vol. 1.

